سلسلة

كنزي

في

الهندسة

الفصل الدراسي الثاني

إعداد الأستاذ

أحمد عمر

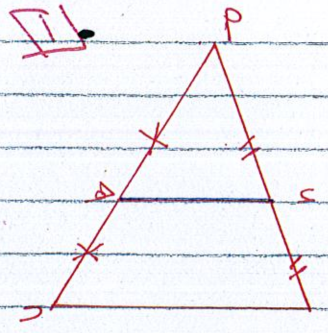
معلم أول رياضيات

01023636682

3

متطلبات قبلية

أولاً

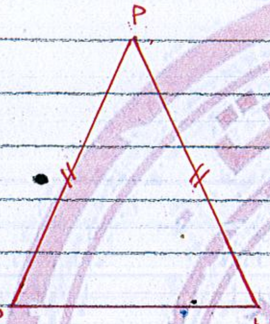


في Δ أ ب جـ

إذا كان ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

فإن:

$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، ءهـ = $\frac{1}{2}$ بجـ

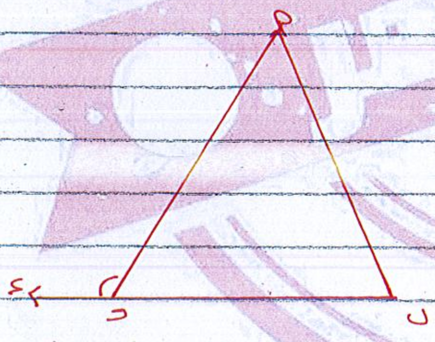


في Δ أ ب جـ

إذا كان: أب = أجـ

فإن ق(ب̂) = ق(جـ̂)

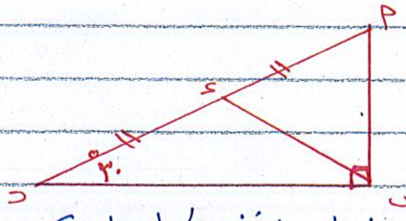
"زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان"



إذا كانت ∠ أجـء خارجة فإن

ق(أجـ̂ء) = ق(أ̂) + ق(ب̂)

"قياس الزاوية الخارجة عن المثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين ماعدا المجاورة لها"



في Δ أ ب جـ

إذا كانت ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(ب̂) = 90°

فإن بء = $\frac{1}{2}$ أجـ

" أب = $\frac{1}{2}$ أجـ "مقابل للزاوية 30°"

طول المتوسط الخارج من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

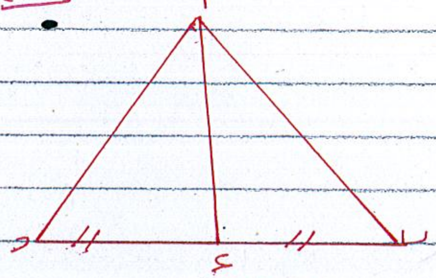
، طول الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر

(٤)

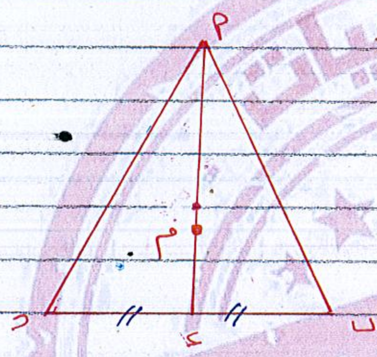
في Δ أ ب ج

اذا كان $\overline{أء}$ متوسط ، أ ء = $\frac{1}{2}$ ب ج

فان: ق($\hat{أ}$) = 90°



اذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث



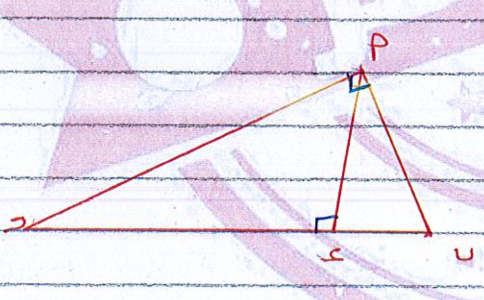
فان:

م ء = $\frac{1}{2}$ أ م ، م ء = $\frac{1}{3}$ أ ء

(نظرية اقليدس)

في Δ أ ب ج القائم في أ

اذا كان $\overline{أء} \perp \overline{بج}$



فان:

(أ ب)^2 = ب ء $\times$ ب ج

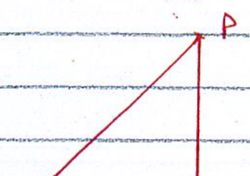
(أ ج)^2 = ج ء $\times$ ج ب

(أ ء)^2 = ء ب $\times$ ء ج

أ ء = $\frac{\text{أ ب} \times \text{أ ج}}{\text{ب ج}}$

نظرية فيثاغورث

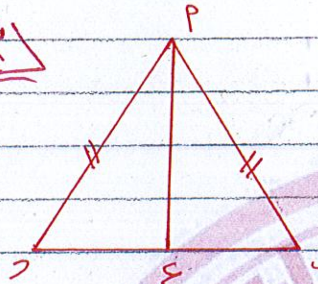
اذا كان Δ أ ب ج قائم في ب



فان:

(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2

نتائج على المثلث المتساوي الساقين: في △ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ ،



١- إذا كان أ ء متوسط فإن
أ ء ⊥ ب جـ ، أ ء ينصف ∠ أ

٢- إذا كان أ ء ⊥ ب جـ فإن أ ء متوسط ، أ ء ينصف زاوية ∠ أ

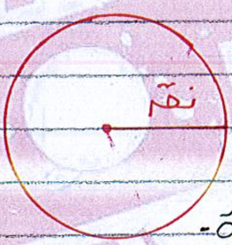
٣- إذا كان أ ء ينصف ∠ أ فإن أ ء ⊥ ب جـ ، أ ء متوسط

الدائرة

هي مجموعة النقط التي تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة

النقطة الثابتة هي **مركز الدائرة**

البعد الثابت هو **نصف قطر الدائرة**



نصف قطر الدائرة:
هي القطعة المستقيمة التي تصل بين مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة

وتر الدائرة: هي القطعة المستقيمة التي تصل بين أي نقطتين على الدائرة.

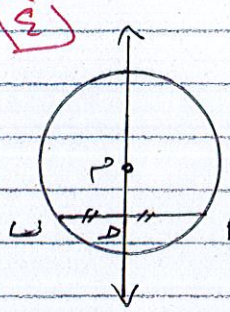
قطر الدائرة: هو الوتر المار بمركز الدائرة ، هو أطول وتر في الدائرة

محيط الدائرة = ٢ ط نق وحدة طول

مساحة الدائرة = ط نق² وحدة مربعة

٤

* نتائج هامة *

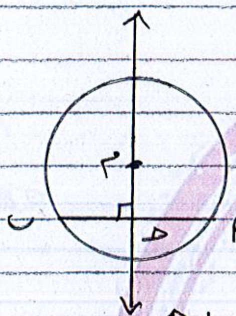


نتيجة (١) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر

أى أنه فى الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{أب}$ وتراً فى الدائرة م ، ح منتصف $\overline{أب}$

فإن $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

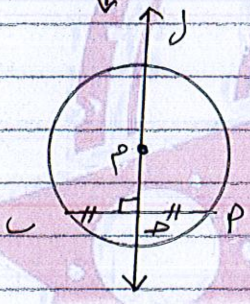


نتيجة (٢) المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

أى أنه فى الشكل المقابل:

إذا كان $\overleftrightarrow{مح} \perp \overline{أب}$ فإن

ح تكون منتصف $\overline{أب}$ أى أح = حب



نتيجة (٣) المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة

ملاحظات هامة:

١ أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

٢ عدد محاور تماثل الدائرة هو عدد لا نهائى

٣ عدد محاور تماثل نصف الدائرة = ١

تذكر: حالات تطابق المثلثات:

١ ضلعان وزاوية محصورة ٣ الأضلاع الثلاثة

٢ زاويتان وضلع واصل ٤ ضلع ووتر فى المثلث القائم

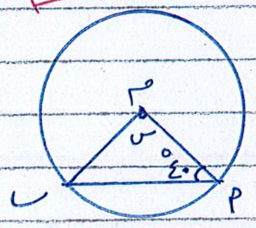
أضف إلى قاموسك إذا كان عمودى ⇐ منتصف

إذا كان منتصف ⇐ عمودى

مثال: في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس حيث م مركز الدائرة:

٥

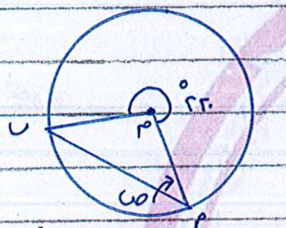
الحل



(١) ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٠°

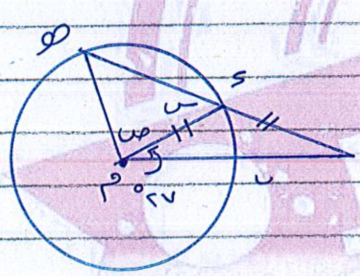
∴ س = ١٨٠ − (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°



(٢) ق(∠أ م ب المنعكسة) = ٢٢٠°

∴ ق(∠أ م ب) = ٣٦٠ − ٢٢٠ = ١٤٠°

∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠°



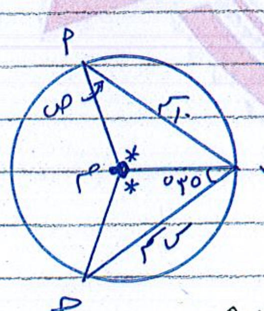
(٣) في △ أ د م ∵ أ د = د م ∴ ق(∠أ) = ٢٧°

∵ ∠د هـ م خارجة عن △ أ د م

∴ س = ٢٧ + ٢٧ = ٥٤°

في △ م د هـ ∵ م د = م هـ = نق ∴ ق(∠م د هـ) = ق(∠م هـ د) = ٢٧

∴ ص = ق(∠د م هـ) = ١٨٠ − (٢٧ + ٢٧) = ١٢٦°



(٤) △△ أ م ب ، جـ م ب

فيهما:
- م أ = م جـ = نق
- م ب ضلع مشترك
- ق(∠أ م ب) = ق(∠جـ م ب)

∴ △ أ م ب ≡ △ جـ م ب وينتج من التطابق أن

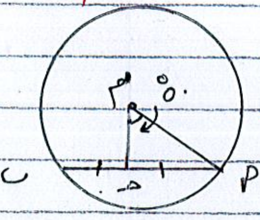
س = ب جـ = أ ب = ٣٠ سم ، ق(∠أ ب م) = ق(∠جـ ب م) = ٣٥°

في △ أ م ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ص = ق(∠م أ ب) = ٣٥°

٦

في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، أكمل :

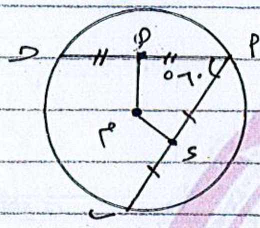


ق(∠م أ حـ) = ...

[١] ∵ $\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، حـ منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overline{م حـ} \perp \overline{أب}$

∴ ق(∠م أ حـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٠) = ٤٠°



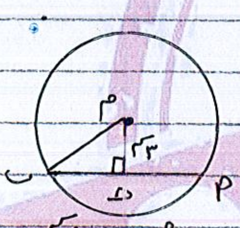
ق(∠د م هـ) = ...

[٢] ∵ هـ منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أحـ}$

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م د} \perp \overline{أب}$

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠د م هـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠°



أ ب = ٨ سم

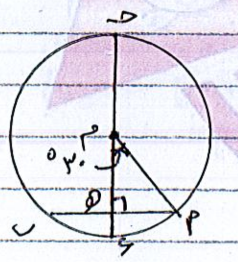
م ب = ... سم

[٣] ∵ $\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{م حـ} \perp \overline{أب}$

∴ حـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٤ سم

من نظرية فيثاغورث (في Δ م حـ ب القائم في حـ)

$(م ب)^2 = (٣)^2 + (٤)^2 = ٢٥$ ∴ م ب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم



أ ب = ١٠ سم فإن:

هـ د = ... سم

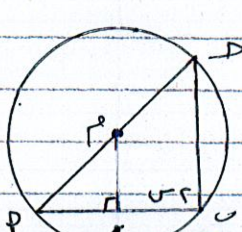
[٤] ∵ $\overline{حـ د}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$

∴ هـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٥ سم

∵ ق(∠أ م هـ) = ٣٠° ∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ م "مقابل للزاوية ٣٠°"

∴ أ م = نق = ٥ سم

∴ حـ د = ٢ نق = ١٠ سم



س = ...

[٥] ∵ $\overline{م د} \perp \overline{أب}$ ∴ د منتصف $\overline{أب}$

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ، م منتصف $\overline{أحـ}$

∴ $\overline{د م}$ // $\overline{ب حـ}$ ∴ ق(∠ب) = ق(∠م د أ) = ٩٠° بالتناظر

∴ ٢ س = ٩٠ ÷ ٢ ∴ س = ٤٥°

7

[6] في △ م أ حـ القائم في حـ

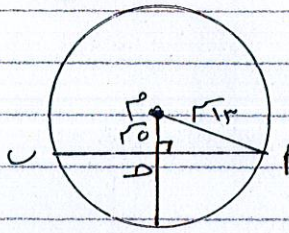
من نظرية فيثاغورث: (أ حـ)² = (١٣)² − (٥)² = ١٤٤ سم²

∴ أ حـ = √١٤٤ = ١٢ سم

∵ م حـ ⊥ أ ب ∴ حـ منتصف أ ب

∴ أ ب = ٢ أ حـ = ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

، حـ ء = م ء − م حـ = ١٣ − ٥ = ٨ سم



أ ب = ... سم

حـ ء = ... سم

[7] في △ أ م ب

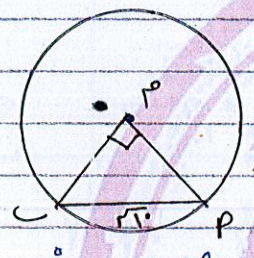
∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $\frac{١٨٠ − ٩٠}{٢}$ = ٤٥°

من نظرية فيثاغورث: (أ ب)² = (م أ)² + (م ب)²

∴ نق² + نق² = (أ ب)²

٢ نق² = ١٠٠ ÷ ٢ ∴ نق² = ٥٠

∴ نق = √٥٠ = ٥√٢ سم



ق(∠أ) = ... °

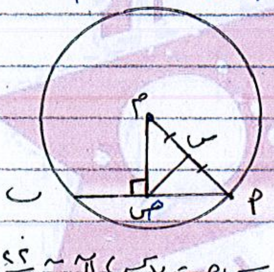
م أ = ... سم

[8] في △ م ص أ القائم في ص

∵ س ص متوسط خارج من رأس القائمة ∴ س ص = ½ م أ

∴ م أ = ٢ × ٧ = ١٤ سم ∴ نق = ١٤ سم

مساحة الدائرة = π نق² = $\frac{٢٢}{٧}$ × (١٤)² = ٦١٦ سم²



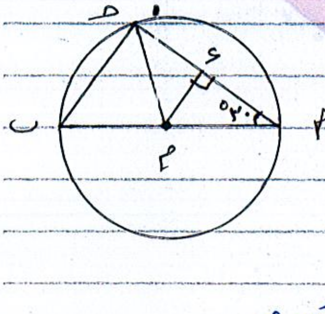
س ص = ٧ سم ، π ≈ $\frac{٢٢}{٧}$

مساحة الدائرة = ... سم²

في الشكل المقابل: أ ب قطر في الدائرة م ، أ حـ وتر فيها

م ء ⊥ أ حـ ، ق(∠أ) = ٣٠° أثبت أن:

① م ء // ب حـ ② △ م ب حـ متساوي الأضلاع.



البرهان: ∵ م ء ⊥ أ حـ ∴ ء منتصف أ حـ

∵ م منتصف أ ب ، ء منتصف أ حـ ∴ م ء // ب حـ ..... ①

∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠م ء أ) = ٩٠° بالتناظر

في △ أ ب حـ ق(∠ب) = ١٨٠ − (٣٠ + ٩٠) = ٦٠°

، ∵ م ب = م حـ = نق ∴ △ م ب حـ متساوي الأضلاع

الدرس الثاني: موضع نقطة ومستقيم بالنسبة للدائرة: (٨)

أولاً موضع نقطة بالنسبة للدائرة:

وإذا كان:

م أ > نق ⟸ فإن النقطة أ تقع خارج الدائرة

م أ = نق ⟸ فإن النقطة أ تقع على الدائرة

م أ < نق ⟸ فإن النقطة أ تقع داخل الدائرة.

حيث م أ هو بعد النقطة أ عن مركز الدائرة م

ثانياً موضع مستقيم بالنسبة للدائرة:

وإذا كان:

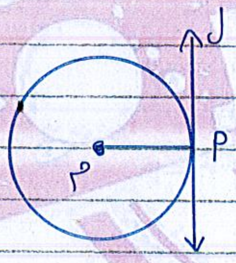
م أ > نق ⟸ فإن المستقيم يقع خارج الدائرة

م أ = نق ⟸ فإن المستقيم يكون مماساً للدائرة

م أ < نق ⟸ فإن المستقيم يكون قاطعاً للدائرة

حيث م أ هو طول العمود النازل من مركز الدائرة على المستقيم ل

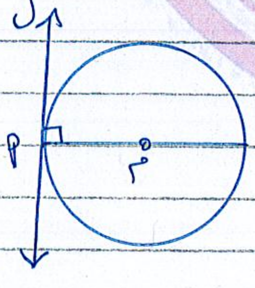
حقيقتان هامتان:



① المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

أي أنه: إذا كان ل مماس للدائرة م عند أ

∴ م أ ⊥ ل



② المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً لها.

أي أنه إذا كان أب قطراً في الدائرة م، ل ⊥ أب

فإن ل يكون مماس للدائرة عند أ

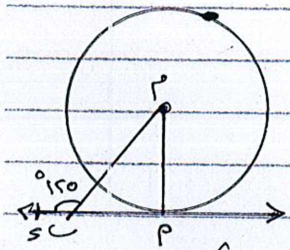
أضف إلى قاموسك: إذا كان عمودي ∴ مماس

إذا كان مماس ∴ عمودي

المماسان المرسومان من نهايتي قطر في الدائرة يكونان متوازيان

(٩)

مثال: في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، أكمل

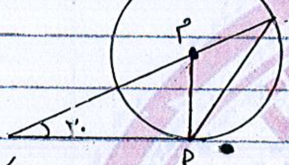


ق(∠أمب) = ...

(١) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ ∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∵ ∠دبم خارجة عن Δ أمب

∴ ق(∠أمب) = ١٢٥ − ٩٠ = ٣٥°



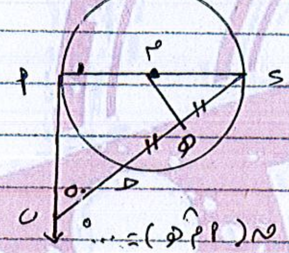
ق(∠أدب) = ...

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ ∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∵ ∠دمأ خارجة عن Δ أمب

∴ ق(∠دمأ) = ٩٠ + ٣٠ = ١٢٠°

∵ م أ = م د = نق ∴ ق(∠د) = ق(∠مأد) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°



ق(∠أمهـ) = ...°

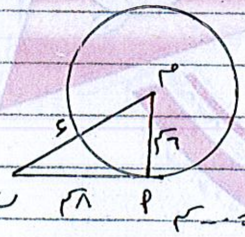
(٣) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ $\overline{مأ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{دجـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{دجـ}$

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠هـمأ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٥٠) = ١٣٠°



ب س = ... سم

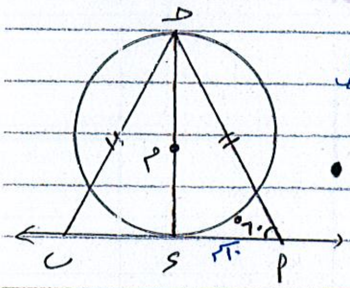
(٤) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

في Δ م أ ب القائم في أ من نظرية فيثاغورث

(م ب)^2 = ٦^2 + ٨^2 = ١٠٠ ∴ م ب = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

∴ ب س = ١٠ − ٦ = ٤ سم



محيط Δ أبجـ = ... سم

(٥) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند د ∴ $\overline{مد} \perp \overline{أب}$

في Δ أبجـ ∵ أجـ = ب جـ ، $\overline{جـد} \perp \overline{أب}$ ∴ $\overline{جـد}$ متوسط

∴ أ ب = ٢٠ سم ، ∵ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ Δ أبجـ متساوي الأضلاع

∴ محيط Δ أبجـ = ٣ × ٢٠ = ٦٠ سم

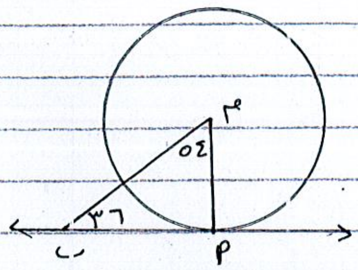
في كل من الأشكال الآتية أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م : (10)

(1) في Δ أ م ب

ق(∠م أ ب) = ١٨٠ − (٣٦ + ٥٤) = ٩٠°

∴ م أ ⊥ $\overline{أب}$

∴ م أ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ



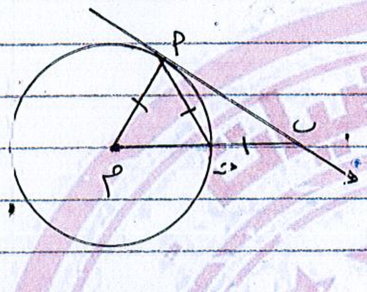
(2) ∵ م أ = م جـ = نق

∴ في Δ أ ب م يكون $\overline{أجـ}$ متوسط ، أجـ = ½ ب م

∴ $\overline{أجـ}$ متوسط ، أجـ = ½ ب م

∴ ق(∠ب أ م) = ٩٠°

∴ $\overline{أب}$ ⊥ أ م ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ



(3) في Δ أ م د ∵ م أ = م د = نق

∴ ق(∠م أ د) = ق(∠م د أ) ... (1)

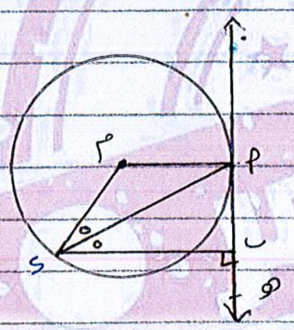
∵ $\overline{د أ}$ ينصف ∠ د ∴ ق(∠م د أ) = ق(∠أ د ب) ... (2)

من (1) ، (2) ∴ ق(∠د أ م) = ق(∠أ د ب)

وهما في وضع تبادل ∴ $\overline{أم}$ // $\overline{ب د}$

∴ ق(∠ب أ م) = ق(∠هـ ب د) = ٩٠° بالتناظر

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ



في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس لها عند أ

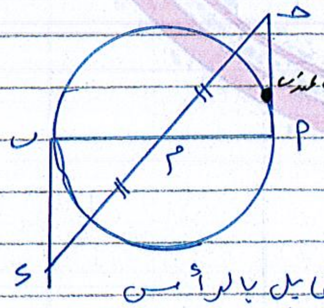
رسم جـ م وقطعت عليه نقطة د بحيث جـ م = م د اثبت أن: ب د مماس للدائرة م عند ب

الحل ∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة عند أ ∴ م أ ⊥ $\overline{أجـ}$

Δ Δ م أ جـ ، م ب د فيهما { م أ = م ب = نق ، م جـ = م د ، ق(∠أ م جـ) = ق(∠ب م د) بالتقابل بالرأس }

∴ Δ م أ جـ ≡ Δ م ب د وينتج من التطابق أن

ق(∠ب) = ق(∠أ) = ٩٠° ∴ ب د مماس للدائرة عند ب



11

* موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى *

نفرض أن م ، ن دائرتين طول نصف قطريهما نق١ ، نق٢ على الترتيب ، نق١ > نق٢ ، م ن البعد بين مركزيهما ،

إذا كانت :

- م ن > نق١ + نق٢ فإن الدائرتين تكونان متباعدتين أو م ن ∈]نق١ + نق٢ ، ∞[
- م ن = نق١ + نق٢ فإن الدائرتين تكونان متماستين من الخارج
- م ن ∈]نق١ − نق٢ ، نق١ + نق٢[أو نق١ − نق٢ < م ن < نق١ + نق٢ فإن الدائرتان تكونان متقاطعتان
- م ن = نق١ − نق٢ فإن الدائرتان تكونان متماستان من الداخل
- م ن < نق١ − نق٢ أو م ن ∈]٠ ، نق١ − نق٢[فإن الدائرتان تكونان متداخلتان
- م ن = صفر فإن الدائرتان تكونان متحدتا المركز

نتائج هامة :

① خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ، ويكون عمودياً على المماس المشترك عند هذه النقطة

② خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه

ملحوظة هامة جداً :

إذا كانت م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب فإن $\overleftrightarrow{م ن}$ تكون محور تماثل أ ب

أضف إلى قاموسك

① إذا كانت م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ∴ م ن ⊥ أ ب

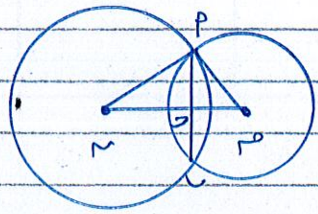
② إذا كانت م ، ن دائرتان متماستان عند أ ∴ م ن ⊥ المماس المشترك

مثال : من الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، $\overline{أب} \cap \overline{م ن} = \{جـ\}$

، فإذا كان : م أ = ٦ سم ، ن أ = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم .

أوجد طول $\overline{أب}$.



الحل : في Δ أ م ن

∵ $(أم)^2 + (أن)^2 = ٦^2 + ٨^2 = ١٠٠ = (م ن)^2$

∴ Δ أ م ن قائم الزاوية في أ

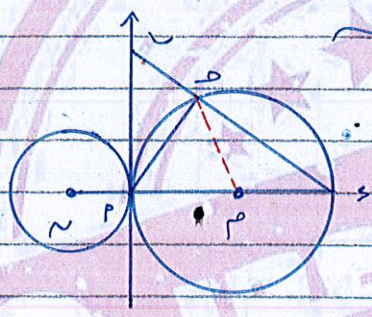
∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أب}$ وينصفه ∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

في Δ أ م ن القائم في أ ∵ $\overline{أجـ} \perp \overline{م ن}$ (إقليدس)

∴ أجـ = $\frac{أم \times أن}{م ن} = \frac{٨ \times ٦}{١٠} = ٤٫٨$

∴ أب = ٢ أجـ = ٢ × ٤٫٨ = ٩٫٦ سم

مثال : من الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في نقطة أ ،

ل مماس مشترك لهما عند أ ، $\overline{أد}$ قطر في الدائرة م

أب = م ن = ٦ سم ، ب جـ = ٣٫٦ سم

(١) أثبت أن : ق(∠ أ جـ د) = ٩٠° (٢) أوجد : طول $\overline{أن}$

الحل في Δ أ جـ د ∵ م منتصف $\overline{أد}$ ∴ جـم متوسط و جـم = $\frac{1}{2}$ أد

∴ ق(∠ أ جـ د) = ٩٠° ..... (أولاً)

∵ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في نقطة أ

∴ $\overline{م ن} \perp \overleftrightarrow{أب}$

في Δ أ ب د القائم في أ ∵ $\overline{أجـ} \perp \overline{ب د}$ (إقليدس)

∴ $(أب)^2 = ب جـ \times ب د$ ∴ ٣٦ = ٣٫٦ × ب د ∴ ب د = $\frac{٣٦}{٣٫٦}$ = ١٠ سم

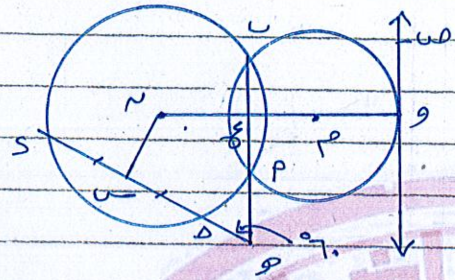
من فيثاغورث ∴ $(أد)^2 = (ب د)^2 - (أب)^2 = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$

∴ أد = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

∴ أم = ٤ سم ∵ أن = ٦ − ٤ = ٢ سم

١٣

في الشكل المقابل:



دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب

س منتصف الوتر جـ د

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overline{جـد} = \{هـ\}$ حيث ق(∠هـ) = ٦٠°

$\overleftrightarrow{صو}$ مماس للدائرة م عند و حيث $\overleftrightarrow{نم} \cap \overleftrightarrow{صو} = \{و\}$

أولاً أوجد: ق(∠ع ن س) ثانياً أثبت أن: $\overleftrightarrow{صو} \parallel \overline{أب}$

الحل

∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ∴ $\overline{مَن} \perp \overline{أب}$

∵ س منتصف جـ د ∴ $\overline{نس} \perp \overline{جـد}$

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ع ن س) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠° ... (أولاً)

∵ $\overleftrightarrow{صو}$ مماس للدائرة م عند و ∴ $\overleftrightarrow{صو} \perp \overleftrightarrow{نم}$

∵ $\overline{أب} \perp \overleftrightarrow{مَن}$ ، $\overleftrightarrow{صو} \perp \overleftrightarrow{مَن}$ ∴ $\overleftrightarrow{صو} \parallel \overline{أب}$

"العموديان على ثالث متوازيان"

١٤

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية:

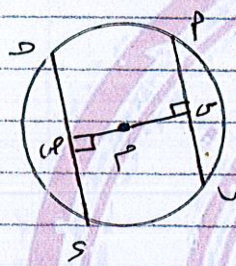
"الأوتار المتساوية في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها"

نتيجة:

الأوتار المتساوية في الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز

عكس النظرية: في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول"

أي أنه في الشكل المقابل:



إذا كان أ ب = جـ د ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ د

فإن م س = م ص

والعكس صحيح:

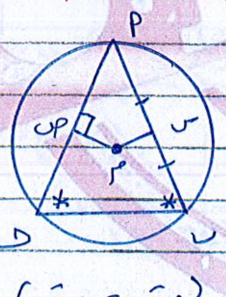
إذا كان م س = م ص ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ د

فإن أ ب = جـ د

إذا كان وتر = وتر فإن بعد = بعد

أضف إلى قاموسك: إذا كان بعد = بعد فإن وتر = وتر

في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل م فيه



ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) ، س منتصف أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

أثبت أن: م س = م ص

الحل: في △ أ ب جـ ∵ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) ∴ أ ب = أ جـ ...①

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب ...②

∵ أ ب = أ جـ ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ (وتر = وتر)

∴ م س = م ص (بعد = بعد) #

أضف إلى قاموسك: في المثلث إذا كان ضلع = ضلع ∴ زاوية = زاوية

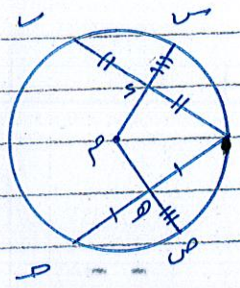
والعكس إذا كان قياس زاوية = قياس زاوية ∴ ضلع = ضلع

في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران في الدائرة م حيث ء منتصف $\overline{أب}$

، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، ءس = هـص

إثبت أن : أب = أجـ



الحل : ∵ م س = م ص = نق ...... ①

، ء س = هـ ص ...... ② بطرح ② من ①

∴ م ء = م هـ ...... ③ (بعد = بعد)

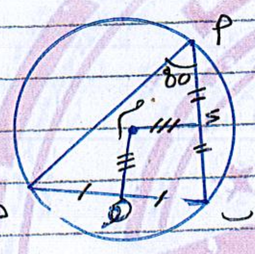
∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ م ء ⊥ $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ م هـ ⊥ $\overline{أجـ}$ ...④

من ③ ، ④ ∴ أب = أجـ (وتر = وتر)

في الشكل المقابل : △ أ ب جـ مرسوم داخل دائرة مركزها م

فإذا كان ق($\hat{أ}$) = ٥٥° ، ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$

م ء = م هـ أوجد ق($\hat{جـ}$)



الحل : ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ م ء ⊥ $\overline{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ م هـ ⊥ $\overline{بجـ}$

∵ م ء = م هـ ∴ أ ب = ب جـ

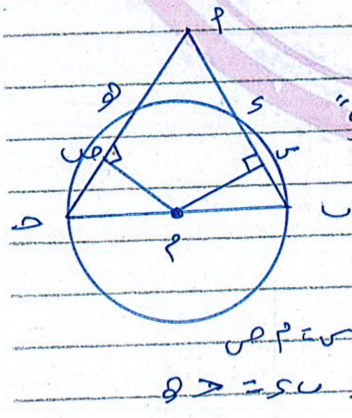
في △ أ ب جـ ∵ أ ب = ب جـ ∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{جـ}$) = ٥٥°

∴ ق($\hat{ب}$) = ١٨٠ − (٥٥ + ٥٥) = ٧٠°

△ أ ب جـ فيه أب = أجـ رسمت دائرة مركزها م ، وقطرها $\overline{بجـ}$ فقطعت $\overline{أب}$ في ء

وقطعت $\overline{أجـ}$ في هـ ، رسم $\overrightarrow{مس}$ ⊥ $\overline{بء}$ تقطعها في س ، $\overline{مص}$ ⊥ جـهـ تقطعها في ص

إثبت أن : ب ء = جـ هـ



الحل : في △ أ ب جـ ∵ أب = أجـ ∴ ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$)

∴ ق(ب م̂ س) = ق(جـ م̂ ص) "متممات الزوايا المتساوية تكون متساوية"

△△ م س ب ، م ص جـ ، م ب = م جـ = نق

فيهما } ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$)

ق(س م̂ ب) = ق(جـ م̂ ص)

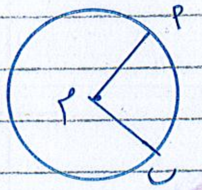
∴ △ م س ب ≡ △ م ص جـ وينتج من التطابق أن م س = م ص

∵ م س = م ص ، م س ⊥ $\overline{بء}$ ، م ص ⊥ $\overline{جـهـ}$ ∴ ب ء = جـ هـ

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

١٣٦

الزاوية المركزية: هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فيها



∠ أ م ب تسمى زاوية مركزية

قياس القوس: هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

أي أن ق(أب⌒) = ق(∠ أ م ب)

طول القوس: هو جزء من محيط دائرته يتناسب مع قياسه

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ} \times \text{محيط الدائرة}$$

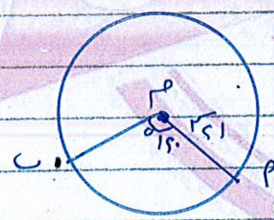
ملاحظات هامة:

① قياس الدائرة = ٣٦٠° بينما طول الدائرة = ٢ ط نق

② قياس ½ الدائرة = ١٨٠ بينما طول نصف الدائرة = ط نق

في الشكل المقابل: دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٢١ سم

ق(∠ أ م ب) = ١٢٠° أوجد: طول أب⌒ (ط ≃ $\frac{٢٢}{٧}$)



الحل

ق(أب⌒) = ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

طول أب⌒ = $\frac{\text{ق(أب⌒)}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

أضف إلى قاموسك

إذا كان أب قطر في الدائرة

∴ ق(أب⌒) = ١٨٠°

١٧

نتائج هامة:

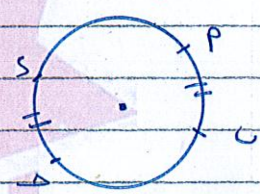
① في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول، والعكس صحيح.

② في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول، والعكس صحيح.

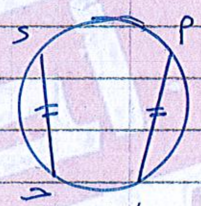
③ الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس

④ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه متساويان في القياس

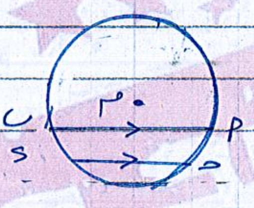
نتيجة ①



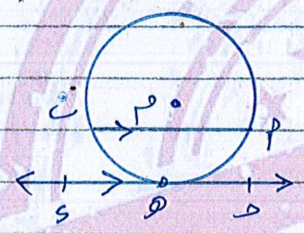
نتيجة ②



نتيجة ③



نتيجة ④

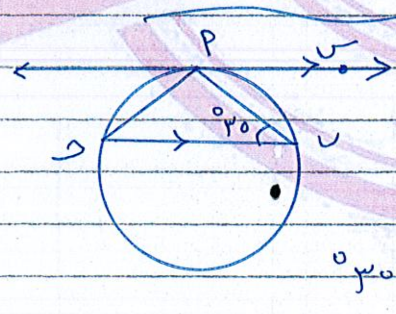


نتيجة ①: إذا كان ق(أ ب) = ق(جـ د) فإن طول أ ب = طول جـ د والعكس صحيح

نتيجة ②: إذا كان ق(أ ب) = ق(جـ د) فإن أ ب = جـ د والعكس صحيح

نتيجة ③: إذا كان أ ب // جـ د فإن ق(أ جـ) = ق(ب د)

نتيجة ④: إذا كان أ ب // جـ د فإن ق(أ هـ) = ق(ب هـ)



مثال: في الشكل المقابل: أ س مماس للدائرة عند أ، الوتر ب جـ // أ س، ق(∠ ب) = ٣٥° أوجد: ق(∠ ب أ جـ)

الحل: ∵ أ س // ب جـ

∴ ق(أ ب) = ق(أ جـ) ∴ أ ب = أ جـ

في Δ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٣٥°

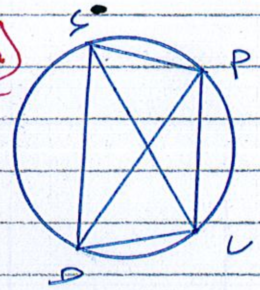
∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° − (٣٥ + ٣٥) = ١١٠°

أضف إلى قاموسك:

وتر = وتر ⟸ قياس قوس = قياس قوس

وتر // وتر ⟸ قياس قوس = قياس قوس

مماس // وتر ⟸ قياس قوس = قياس قوس



مثال: في الشكل المقابل: أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة بحيث أن: أ جـ = ب د

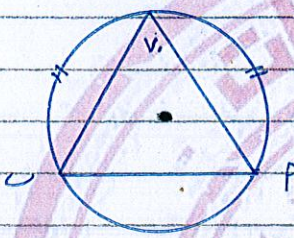
فأثبت أن: أ د = ب جـ

الحل: ∵ أ جـ = ب د "وتر = وتر"

∴ ق(⌒أ ب جـ) = ق(⌒ب أ د) "قوس = قوس"

بطرح ق(⌒أ ب) من الطرفين

∴ ق(⌒أ د) = ق(⌒ب جـ) ∴ أ د = ب جـ

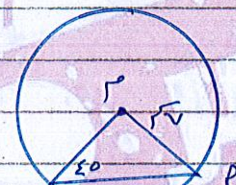


في الشكل المقابل: إذا كان: ق(⌒أ جـ) = ق(⌒ب جـ)، ق(∠أ جـ ب) = ٧٠° أوجد: ق(∠أ ب جـ)

الحل: ∵ ق(⌒أ جـ) = ق(⌒ب جـ) ∴ أ جـ = ب جـ

في △ أ ب جـ ∵ أ جـ = ب جـ "ضلع = ضلع"

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = \frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°



في الشكل المقابل: ق(∠م ب أ) = ٤٥°، م أ = ٧ سم

أوجد: طول ⌒أ ب (اعتبر π ≃ $\frac{٢٢}{٧}$)

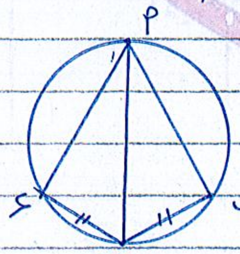
الحل: في △ م أ ب

∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠°

∴ ق(⌒أ ب) = ق(∠أ م ب) = ٩٠°

∴ طول ⌒أ ب = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١١ سم



في الشكل المقابل: أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م، أ جـ قطر في الدائرة، جـ ب = جـ د

اثبت أن: ق(⌒أ ب) = ق(⌒أ د)

الحل: ∵ أ جـ قطر في الدائرة م ∴ ق(⌒أ ب جـ) = ق(⌒أ د جـ) ...(١)

∵ ب جـ = جـ د ∴ ق(⌒ب جـ) = ق(⌒جـ د) ...(٢)

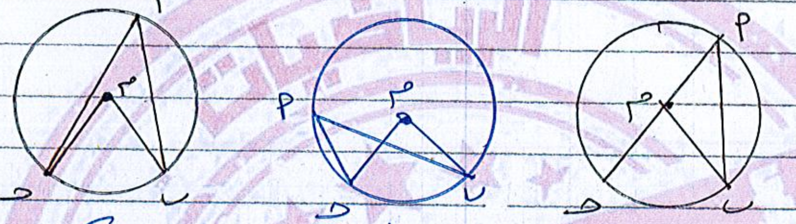
بطرح (٢) من (١) ∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒أ د) #

١٩

الزاوية المحيطية

الزاوية المحيطية: "هي الزاوية التي رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا في هذه الدائرة"

نظرية ①: "قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس"

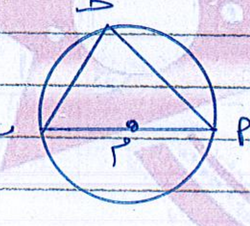


في كل من الأشكال السابقة ∠ ب أ جـ محيطية، ∠ ب م جـ مركزية

فيكون ق(∠ أ جـ) = ½ ق(∠ ب م جـ)

أو ق(∠ ب م جـ) = ٢ ق(∠ ب أ جـ)

نتيجة ①: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها

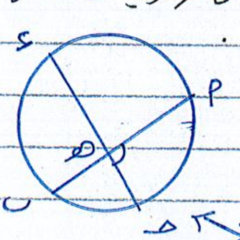


نتيجة ٢: الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

في الشكل المقابل: إذا كان أب قطر في الدائرة م

فإن ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

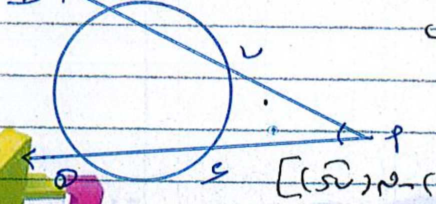
تمرين مشهور ①: إذا تقاطع وتران من نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



من الشكل المقابل:

ق(∠ أ هـ جـ) = ½ [ق(⌒أ جـ) + ق(⌒ب د)]

تمرين مشهور ②: "إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرانه هذه الزاوية" ق(∠أ) = ½ [ق(⌒هـ جـ) − ق(⌒ب د)]



الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

(٢)

نظرية (٣): الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس.

نتيجة: الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) تكون متساوية في القياس.

عكس النتيجة: الزوايا المحيطية المتساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) تحصر بين ضلعيها أقواساً متساوية في القياس.

عكس نظرية (٣): الشكل الرباعي الدائري

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها.

ملاحظات هامة:

① إذا وجدت زاويتان مرسومتان على ضلع من أضلاع شكل رباعي وفي جهة واحدة من هذا الضلع وكانتا غير متساويتين في القياس فإن الشكل لا يكون رباعياً دائرياً.

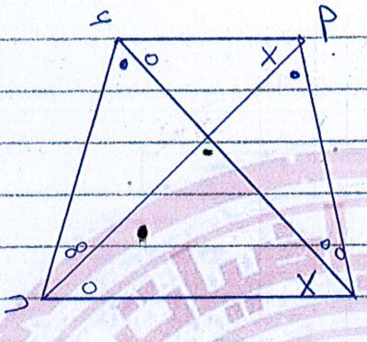
② المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوي الساقين ليست أشكالاً رباعية دائرية.

(1)

الشكل الرباعي الدائري

إذا كان أ ب جـ د رباعي دائري فإن

1. كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها تكونان متساويتان في القياس



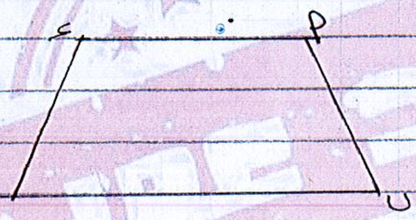
ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ)

مرسومتان على ب جـ

ومن جهة واحدة منه

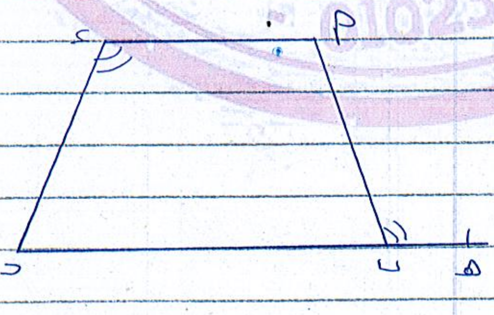
2. كل زاويتين متقابلتين فيه تكونان متكاملتان

ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠



ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠

3. قياس الزاوية الخارجة = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



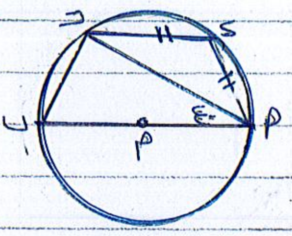
ق(∠أ ب هـ) = ق(د̂)

الشكل الرباعي الدائري

١) في الشكل المقابل:

أ ب جـ د رباعي مرسوم داخل دائرة م ،

ق(∠جـ أ ب) = ٤٠° ، د أ = د جـ



أوجد:

١- ق(∠د) ٢- ق(∠د أ جـ)

الحل

∵ أ ب قطر في الدائرة م ، ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

في △ أ ب جـ القائم في جـ

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∵ أ ب جـ د رباعي دائري (رءوسه الاربعة تقع على الدائرة)

∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

∴ ق(∠د) = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠°

في △ أ د جـ ∵ أ د = د جـ

∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د جـ أ) = $\frac{١٨٠ - ١٣٠}{٢}$ = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥°

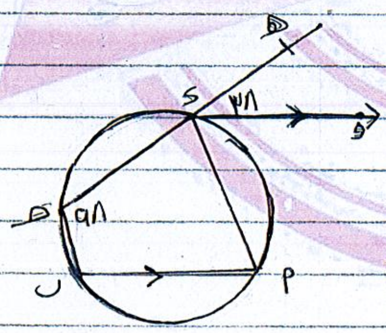
٢- في الشكل المقابل:

أ ب جـ د شكل رباعي دائري مرسوم داخل دائرة ، د و // ب أ

ق(∠د جـ ب) = ٩٨° ، ق(∠هـ د و) = ٣٨°

أوجد: ق(∠أ ب جـ)

الحل



∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠جـ) + ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − ٩٨ = ٨٢°

∵ د و // أ ب ، أ د قاطع لهما

∴ ق(∠و د أ) = ق(∠أ) = ٨٢ بالتبادل

∴ ق(∠أ د هـ) = ٣٨ + ٨٢ = ١٢٠°

∵ ∠هـ د أ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ د

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ د أ) = ١٢٠°

(٣٧)

الشكل الرباعي الدائري

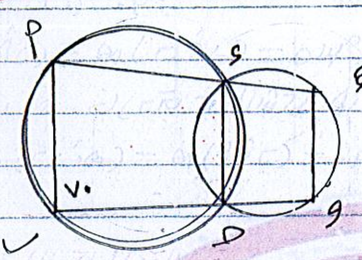
٣- في الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متقاطعتان في د ، ء

ق(ب̂) = ٧٠°

أوجد: ق(و̂)

اثبت: أن هـ و // أ ب



الحل

∵ أ ب د ء رباعي دائري

∴ ق(هـ ء̂ د) = ق(ب̂) = ٧٠°   خارجة عن الرباعي الدائري

∵ الشكل هـ و د ء رباعي دائري

∴ ق(و̂) + ق(هـ ء̂ د) = ١٨٠°   متقابلتان

∴ ق(و̂) = ١٨٠ - ٧٠ = ١١٠°   (أولاً)

∴ ق(و̂) + ق(ب̂) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما في وضع تداخل

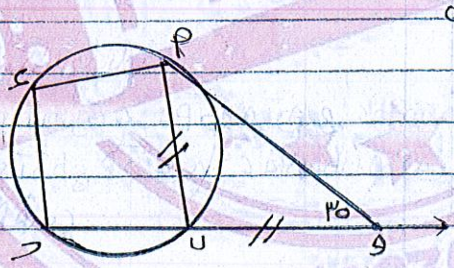
∴ هـ و // أ ب   (ثانياً)

٤- في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

ب و = ب أ ، ق(ب و̂ أ) = ٣٥°

أوجد: ق(ء̂)



الحل

في △ أ ب و

∵ أ ب = ب و

∴ ق(أ و̂ ب) = ق(ب أ̂ و) = ٣٥°

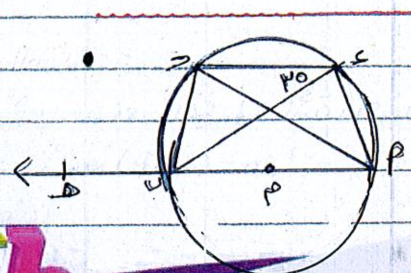
∴ ق(أ ب̂ و) = ١٨٠ - (٣٥ + ٣٥) = ١٨٠ - ٧٠ = ١١٠°

∵ ∠ أ ب و خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ ء

∴ ق(أ ب̂ و) = ق(ء̂) = ١١٠°

٥- في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م ، ق(ب ء̂ د) = ٣٥°



أوجد ١- ق(أ ء̂ ب)

٢- ق(د أ̂ ب)   ٣- ق(د ب̂ هـ)

٢٤

الحل

∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أءب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة (أولاً)

ق(∠د أ ب) = ق(∠د ء ب) = ٣٥ محيطيتان تحصران د ب (ثانياً)

∵ ∠د ب هـ خارجة عن الشكل أ ب د ء الرباعي الدائري

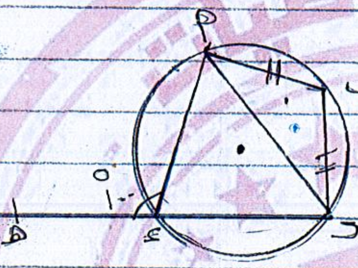
∴ ق(∠د ب هـ) = ق(∠أ ء د) = ٩٠ + ٣٥ = ١٢٥° (ثالثاً)

٦- في الشكل المقابل

أ ب ج د رباعي دائري، هـ ∈ د ج، ق(∠أ د هـ) = ١٠٠°

أب = ب ج

أوجد: ق(∠ب أ ج)



الحل

∵ ∠أ د هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ج د

∴ ق(∠ب) = ق(∠أ د هـ) = ١٠٠°

في △ أ ب ج

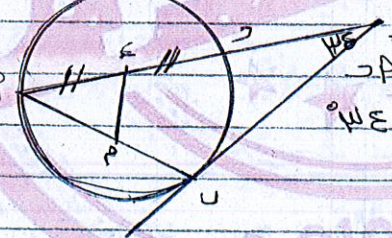
∵ أب = ب ج ∴ ق(∠ب أ ج) = ق(∠ب ج أ) = $\frac{١٨٠-١٠٠}{٢}$ = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠°

٧- في الشكل المقابل:

أب قطر في الدائرة م ، أ ج وتر فيها ، ء منتصف أ ج

ب و مماسة تقطع أ ج في و ، فإذا كان ق(∠و) = ٣٤°

أوجد: ق(∠أ م ء)



الحل

∵ ء منتصف أ ج ∴ م ء ⊥ أ ج ، ∵ ب و مماسة للدائرة عند ب ∴ و ب ⊥ م ب

∴ ق(∠م ء و) + ق(∠م ب و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل و ب م ء رباعي دائري ، ∵ ∠أ م ء خارجة عن الرباعي الدائري

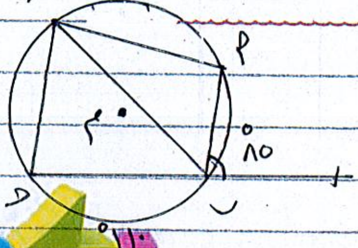
∴ ق(∠أ م ء) = ق(∠و) = ٣٤°

٨- في الشكل المقابل:

إذا كان أ ، ب ، ج ، ء تقع على دائرة مركزها م

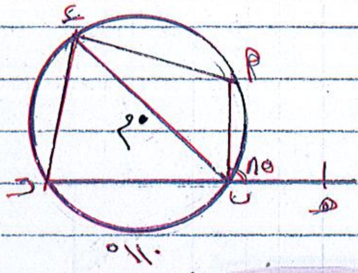
ق(∠ب ج) = ١١٠° ، ق(∠أ ب هـ) = ٨٥°

أوجد: ق(∠أ ء ب)



الحل

٢٥



∵ أ ب جـ د رباعي دائري ، ∠ أ ب هـ خارجة عنه

∴ ق(∠أ د جـ) = ق(∠أ ب هـ) = ٨٥

∵ ق(ب جـ) = ١١٠°

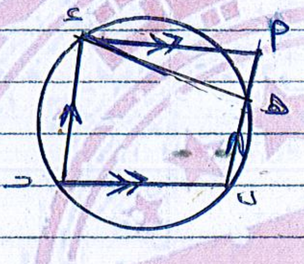
∴ ق(∠ب د جـ) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥ محيطية تحصر ب جـ

∴ ق(∠أ د ب) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠°

٩ـ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د متوازي أضلاع الدائرة المارة بالنقط

ب ، جـ ، د وتقطع أ ب في هـ



اثبت أن: أ د = هـ د

الحل

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) ـــ ①

∵ ∠ د هـ أ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري هـ ب جـ د

∴ ق(∠أ هـ د) = ق(∠جـ) ـــ ②

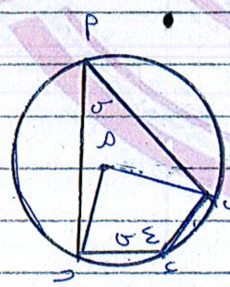
من ١ ، ٢ ∴ ق(∠أ) = ق(∠د هـ أ)

في △ أ هـ د ∵ ق(∠أ) = ق(∠د هـ أ) ∴ أ د = هـ د

١٠ـ في الشكل المقابل:

إذا كان م مركز الدائرة فأوجد

١ـ قيمة س بالدرجات ٢ـ ق(∠ب م د)



الحل

∵ أ ب جـ د رباعي دائري ∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ س + ٤ س = ١٨٠°

∴ ٥ س = ١٨٠ ∴ س = $\frac{١٨٠}{٥}$ = ٣٦°

∴ ق(∠أ) = ٣٦°

∴ ق(∠ب م د) = ٢ ق(∠أ) = ٢ × ٣٦ = ٧٢°

مركزية ومحيطية تحصران ب د

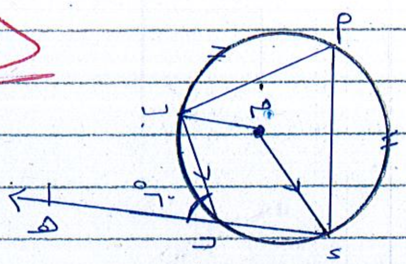
١١- في الشكل المقابل:

دائرة م ، ق(∠ب جـ هـ) = ٦٠°

بجـ // مد ، م منتصف أد

اثبت أن: ١- الشكل ب م د جـ معين

٢- أجـ قطر في الدائرة



الحل

∵ د ب جـ هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ د جـ ب

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب جـ هـ) = ٦٠°

∴ ق(∠د م ب) = ٢ق(∠أ) = ١٢٠° مركزية ومحيطية تحصران بد

∵ ب جـ // م د ... ①

∴ ق(∠م د جـ) = ق(∠ب جـ هـ) = ٦٠° بالتناظر

∴ ق(∠د م ب) + ق(∠م د جـ) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠ وهما في وضع تداخل

∴ م ب // د جـ ... ②

من ١ ، ٢ ∴ الشكل م د جـ ب متوازي أضلاع

∵ م د = م ب = نق ∴ الشكل م د جـ ب معين

∴ الشكل م د جـ ب معين

∴ د جـ = جـ ب وتر = وتر

∴ ق(دجـ⌒) = ق(جـب⌒) ... ③

∵ ق(أد⌒) = ق(أب⌒) ... ④

بجمع ٣ ، ٤

∴ ق(أد⌒) + ق(دجـ⌒) = ق(أب⌒) + ق(جـب⌒)

∴ ق(أدجـ⌒) = ق(أبجـ⌒) = ٣٦٠ ÷ ٢ = ١٨٠°

∴ أجـ قطر في الدائرة

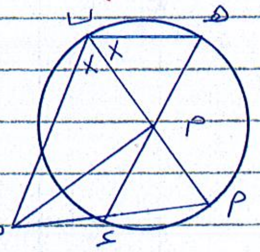
١٢- في الشكل المقابل:

أب قطر في الدائرة م ، جـ ∈ أد

بم ينصف ∠هـ ب جـ ، د م يقطع الدائرة في هـ

اثبت أن: ١- الشكل م ب جـ د رباعي دائري

٢- جـ م ⊥ أب



(٧)

٤٧

الحل

∵ $\overline{ب م}$ ينصف ∠ هـ ب د

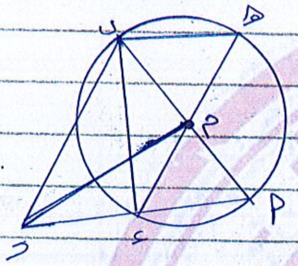
∴ ق(∠هـ ب م) = ق(∠م ب د) ...... ①

∵ ق(∠هـ ب م) = ق(∠هـ ع م) محيطيتان تحصران $\overset\frown{هـ م}$ ...... ②

من ①، ② ∴ ق(∠م ع هـ) = ق(∠م ب د)

وهى خارجة عن الشكل م ب د ع

∴ الشكل م ب د ع رباعى دائرى اولاً



العمل:

نرسم $\overline{ب ع}$

∵ $\overline{م ب}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠م ع ب) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ ق(∠ب ع د) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

∵ م ب د ع رباعى دائرى

∴ ق(∠ب م د) = ق(∠ب ع د) = ٩٠°

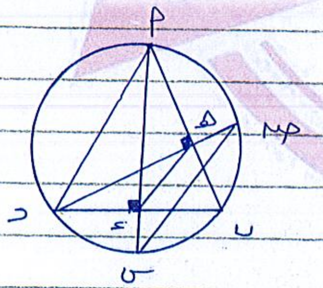
∴ $\overline{د م} \perp \overline{م ب}$

١٣- فى الشكل المقابل:

$\overline{م س} \perp \overline{ب د}$ ، $\overline{د ص} \perp \overline{م ب}$

اثبت أن: $\overline{س ص} // \overline{ع هـ}$

الحل



∵ $\overline{م س} \perp \overline{ب د}$ ∴ ق(∠م ع د) = ٩٠° ...... ①

∵ $\overline{د ص} \perp \overline{م ب}$ ∴ ق(∠م هـ د) = ٩٠° ...... ②

من ١، ٢ ∴ ق(∠م هـ د) = ق(∠م ع د) = ٩٠°

وهما مرسومتان على م د وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل م هـ ع د رباعى دائرى

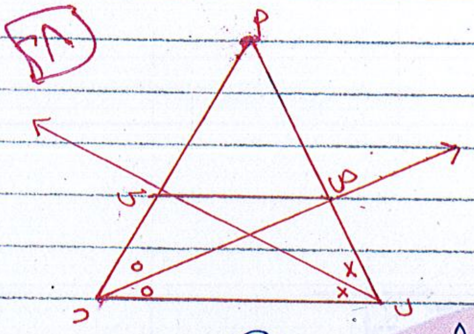
∴ ق(∠ع هـ د) = ق(∠ع م د) ...... ③

∵ ق(∠س ص د) = ق(∠س م د) ...... ④ محيطيتان تحصران $\overset\frown{س د}$

من ③، ④ ∴ ق(∠ع هـ د) = ق(∠س ص د)

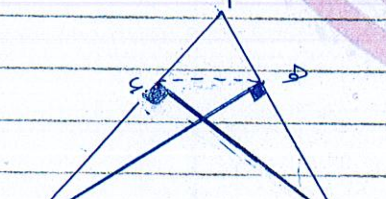
وهما فى وضع تناظر ∴ $\overline{س ص} // \overline{ع هـ}$

١٤- في الشكل المقابل:
أب = أجـ ، ب س ينصف ∠ب ويقطع أجـ في س ،
جـ ص ينصف ∠جـ ويقطع أب في ص
أثبت أن: ١- ب جـ س ص رباعي دائري
٢- $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$



الحل
∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ---- ①
∵ ب س ينصف ∠ب ∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠س ب جـ) ---- ②
∵ جـ ص ينصف ∠جـ ∴ ق(∠س جـ ص) = ق(∠ص جـ ب) ---- ③
من ١، ٢، ٣ ∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠ص جـ س)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل ب جـ س ص رباعي دائري
∵ ∠أ ص س خارجة عن الرباعي الدائري
∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠جـ) ---- ③
من ①، ④ ∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠ب) وهما في وضع تناظر
∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

١٥- في الشكل المقابل
أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه: ب جـ = ١٠ سم، رسم ب ء ⊥ أجـ فقطعه في ء ،
رسم جـ هـ ⊥ أب فقطعه في هـ أثبت أن
١- ب، جـ، ء، هـ يمر بها دائرة واحدة وأوجد طول نصف قطرها
٢- Δ أ ب ء ~ Δ أ جـ هـ



الحل
∵ ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠ب ء جـ) = ٩٠°
وهما مرسومتان على ب جـ وفي جهة واحدة منها
∴ ب جـ ء هـ رباعي دائري
∵ ق(∠ب هـ جـ) = ٩٠° ∴ ب جـ قطر في الدائرة
∴ نق = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٥ سم (أولاً)
∵ هـ ب جـ ء رباعي دائري ∴ ق(∠هـ ب ء) = ق(∠هـ جـ ء)
∴ Δ Δ أ ب ء ، أ جـ هـ فيهما
∠أ مشتركة
ق(∠هـ ب ء) = ق(∠هـ جـ ء)
ق(∠أ ء ب) = ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠°
∴ Δ أ ب ء ~ Δ أ جـ هـ

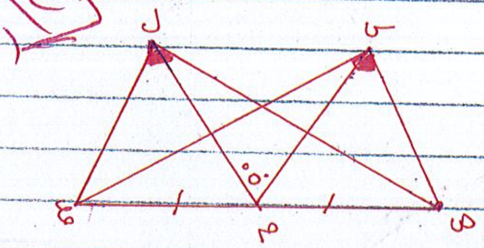
١٦- فى الشكل المقابل:

ق(∠ص س ع) = ق(∠ص ل ع) = ٩٠°

م منتصف ص ع ، ق(∠س م ل) = ٥٠° اوجد

١- ق(∠س ص ل)

٢- اثبت ان ق(∠س ص ل) = ق(∠س ع ل)



الحل

∵ ق(∠ص س ع) = ق(∠ص ل ع) = ٩٠°

وهما مرسومتان على ص ع وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل س ص ع ل رباعى دائرى

∵ ق(∠ص س ع) = ٩٠°   ∴ ∠ص س ع مرسومة فى نصف دائرة

∴ ص ع قطر ، م مركز هذه الدائرة

∴ ق(∠س ص ل) = $\frac{1}{2}$ ق(∠س م ل) = $\frac{50}{2}$ = ٢٥° محيطية ومركزية

∵ الشكل س ص ع ل رباعى دائرى

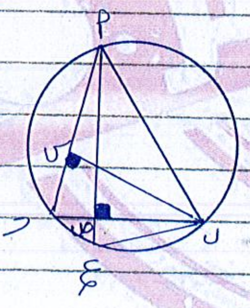
∴ ق(∠س ص ل) = ق(∠س ع ل)

١٧- فى الشكل المقابل:

ب س ⊥ أ د ، أ ص ⊥ ب د

اثبت ان ١- الشكل أ ب ص س رباعى دائرى

٢- ب د ينصف ∠س ب ع



الحل

∵ ق(∠أ س ب) = ق(∠أ ص ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أ ب وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ص س رباعى دائرى (اولاً)

∵ أ ب ص س رباعى دائرى

∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠ص أ س) ...... ①

، ∵ ق(∠ع ب د) = ق(∠ع أ د) ...... ② محيطيتان تحصران ع د

من ١ ، ٢

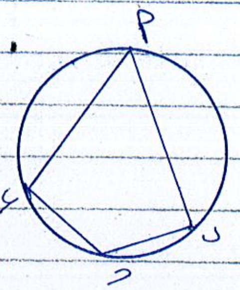
∴ ق(∠ع ب د) = ق(∠د ب س)

∴ ب د ينصف ∠س ب ع

#

٣٠

الشكل الرباعي الدائري



اثبت انه اذا كان الشكل الرباعي دائريًا فان كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان

المعطيات: أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

المطلوب: إثبات أن ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° ،
ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{ء}$) = ١٨٠°

الحل

البرهان:

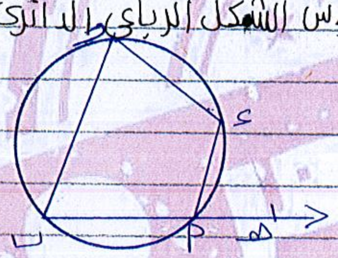
∵ ق($\hat{أ}$) = $\frac{1}{2}$ ق(ب جـ ء) ، ق($\hat{جـ}$) = $\frac{1}{2}$ ق(ب أ ء)

∴ ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{جـ}$) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب جـ ء) + ق(ب أ ء)]

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠ = ١٨٠

وبالمثل ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{ء}$) = ١٨٠°

اثبت ان قياس الزاوية الخارجة عن أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



المعطيات: أ ب جـ ء رباعي دائري ، هـ ∈ $\overrightarrow{ب أ}$ ،
هـ ∉ أ ب

المطلوب: إثبات أن ق(∠هـ أ ء) = ق($\hat{جـ}$)

البرهان

∵ أ ب جـ ء رباعي دائري

∴ ق($\hat{جـ}$) + ق(∠ء أ ب) = ١٨٠ متقابلتان ــ ــ (١)

∵ هـ ∈ $\overrightarrow{ب أ}$ ∴ ق(∠ء أ هـ) + ق(∠ء أ ب) = ١٨٠ ــ ــ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠ء أ هـ) = ق($\hat{جـ}$)

* خواص الشكل الرباعي الدائري *

لإثبات أن الشكل الرباعي دائريًا نثبت حالة واحدة مما يلي (٣١)

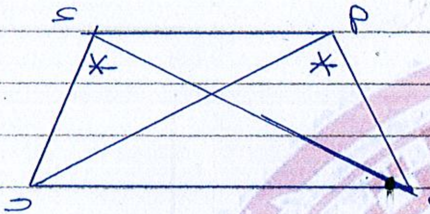
١- زاويتان مرسومتان على قاعدة وفي جهة واحدة منها متساويتان في القياس
إذا كان:

١- ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ء جـ) مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$

أو ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ء ب) مرسومتان على $\overline{\text{أ ب}}$

أو ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ء) مرسومتان على $\overline{\text{أ ء}}$

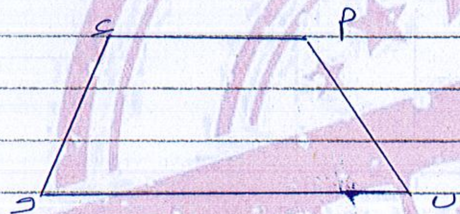
أو ق(∠ء أ جـ) = ق(∠ء ب جـ) مرسومتان على $\overline{\text{ء جـ}}$



٢- زاويتان متقابلتان متكاملتان

إذا كان: ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

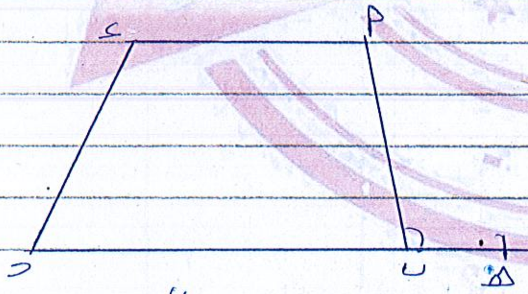
أو ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°



٣- زاوية خارجة عند رأس من رءوسه قياسها يساوي قياس الداخلة المقابلة المجاورة لها
إذا كان

ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ء)

فإن: أ ب جـ ء رباعي دائري



٤- توجد نقطة في مستوى الشكل الرباعي على أبعاد متساوية من رءوسه

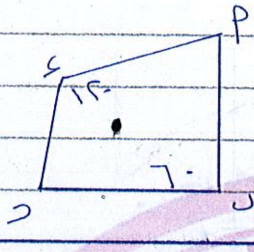
إذا كانت م نقطة بحيث

م أ = م ب = م جـ = م ء

فإن أ ب جـ ء يكون رباعي دائري

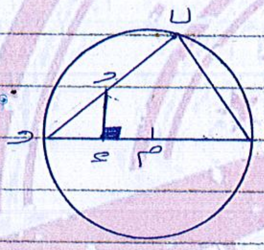
في كل شكل من الأشكال الآتية اثبت أن
الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

١- في الشكل المقابل:



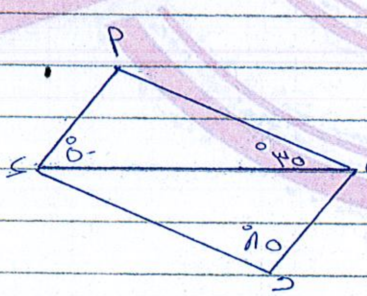
∵ ق(∠ب) + ق(∠د) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

٢-



∵ أ جـ قطر في الدائرة م
∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°
محيطية مرسومة في نصف دائرة
∵ د هـ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ هـ د) = ٩٠°
∴ ق(∠أ ب جـ) + ق(∠أ هـ د) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

٣- في △ أ ب د
ق(∠أ) = ١٨٠ − (٣٥ + ٥٠)
= ١٨٠ − ٨٥ = ٩٥

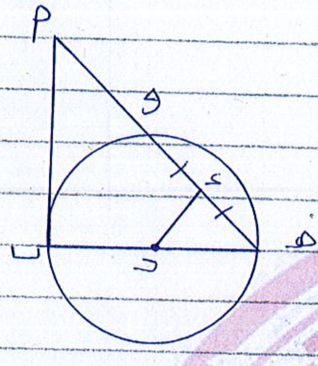


∵ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ٨٥ + ٩٥ = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

٤- في الشكل المقابل:

د ب قطر في الدائرة د ، أب مماس للدائرة د عند ب ،

ء منتصف هـ و



الحل

∵ أب مماس للدائرة د عند ب

∵ أب ⊥ هـ ب ∴ ق(أ ب̂ د) = ٩٠° ... ①

∵ ء منتصف هـ و

∵ د ء ⊥ هـ و ∴ ق(د ء̂ أ) = ٩٠° ... ②

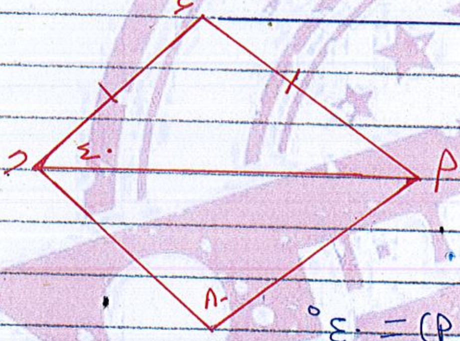
من ①② ∴ ق(أ ب̂ د) + ق(د ء̂ أ) = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب د ء رباعي دائري

٥- في الشكل المقابل:

أء = ء د ، ق(أ د̂ ء) = ٤٠° ، ق(ب̂) = ٩٠°

أثبت أن الشكل أ ب د ء رباعي دائري



الحل

في △أ ء د

∵ أء = ء د ∴ ق(ء د̂ أ) = ق(ء أ̂ د) = ٤٠°

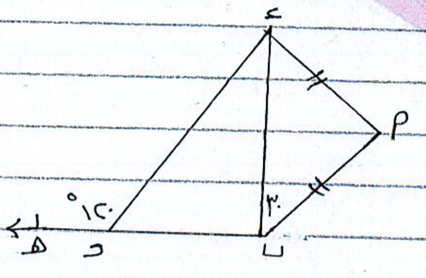
∴ ق(ء̂) = ١٨٠ − (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

∴ ق(ب̂) + ق(ء̂) = ٨٠ + ١٠٠ = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب د ء رباعي دائري

٦- في الشكل المقابل:

اثبت أن الشكل أ ب د ء رباعي دائري



الحل

في △أ ب ء

∵ أب = أء ∴ ق(أ ء̂ ب) = ق(أ ب̂ ء) = ٣٠°

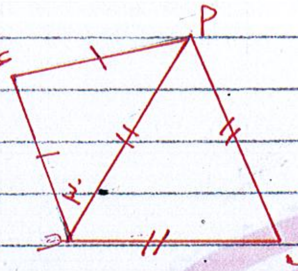
∴ ق(أ̂) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∵ ق(ء د̂ هـ) = ق(أ̂) = ١٢٠

وهي خارجة عن الشكل أ ب د ء

∴ الشكل أ ب د ء رباعي دائري

٧- في الشكل المقابل
اثبت أن: أ ب جـ د رباعي دائري



الحل

في △ أ ب جـ

∵ أب = ب جـ = جـ أ

∴ ق(∠ب) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠° ..... (١)

في △ أ د جـ

∵ أد = د جـ

∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د جـ أ) = ٣٠°

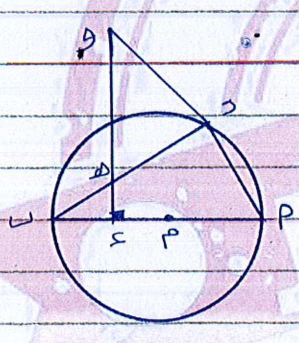
∴ ق(∠د) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠° ..... (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

٨- في الشكل المقابل:



أب قطر في الدائرة م، ء هـ ⊥ أب ،
ق(∠و جـ هـ) = ق(∠أ)

اثبت أن: ١- الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري
٢- و جـ = و هـ

الحل

∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة) ..... (١)

∵ ء هـ ⊥ أب

∴ ق(∠هـ ء أ) = ٩٠ ..... (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(∠أ جـ ب) + ق(∠أ ء هـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

وهما متقابلتان ∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

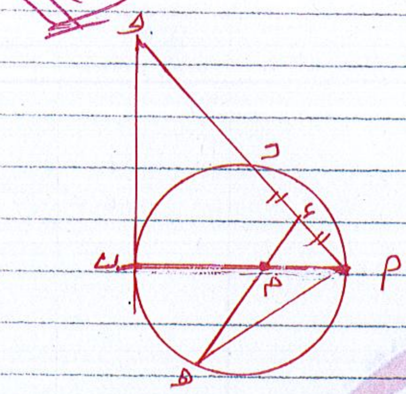
∵ أ ء هـ جـ رباعي دائري

∴ ق(∠و هـ جـ) = ق(∠أ) خارجة عن الرباعي الدائري

∵ ق(∠و جـ هـ) = ق(∠أ) معطى

∴ ق(∠و هـ جـ) = ق(∠و جـ هـ) ∴ و جـ = و هـ

٣٤



٩- في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{بو}$ مماس للدائرة م عند ب

أثبت أن: ١- الشكل م ب و ء رباعي دائري

٢- ق(∠أوب) = ٢ق(∠هـ)

الحل

∵ ء منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أجـ}$

∵ $\overleftrightarrow{بو}$ مماس للدائرة م عند ب ∴ $\overline{وب} \perp \overline{مب}$

∴ ق(∠أءو) + ق(∠مبو) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل م ب و ء رباعي دائري (أولاً)

∵ الشكل م ب و ء رباعي دائري

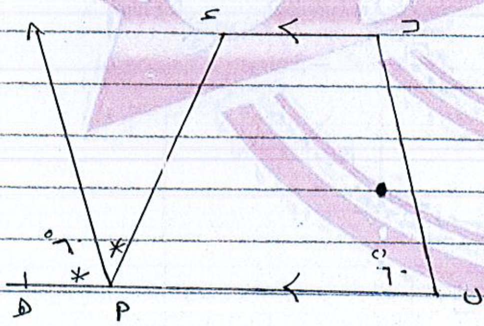
∴ ق(∠أمء) = ق(∠و) خارجة عن الرباعي الدائري ---- ①

في △ م أ هـ ∵ م أ = م هـ = نق ∴ ق(∠م أ هـ) = ق(∠م هـ أ)

∵ ∠أمء خارجة عن △ م أ هـ

∴ ق(∠أمء) = ٢ق(∠هـ) ---- ②

من ①، ② ∴ ق(∠أوب) = ٢ق(∠هـ) (ثانياً)



١٠- في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{أو}$ ينصف ∠ءأهـ ، $\overline{جـء} \parallel \overleftrightarrow{بهـ}$ ،

ق(∠وأهـ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

أثبت أن: الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

الحل

∵ $\overline{جـء} \parallel \overleftrightarrow{بهـ}$ ، $\overline{بجـ}$ قاطع لهما

∴ ق(∠جـ) + ق(∠ب) = ١٨٠° بالتداخل

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° ---- ①

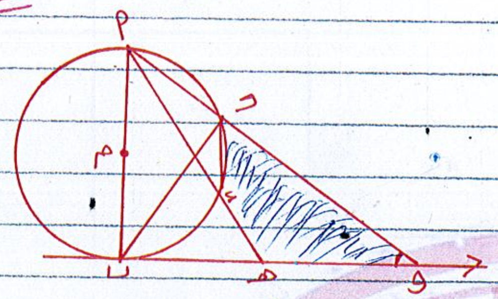
∵ $\overrightarrow{أو}$ ينصف ∠ءأهـ

∴ ق(∠ءأهـ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠° ---- ②

من ①، ② ∴ ق(∠ءأهـ) = ق(∠جـ)

وهي خارجة عن الشكل أ ب جـ ء ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

١١- فى الشكل المقابل :

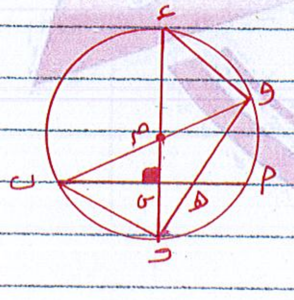


$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أء}$ وتران فيها ، $\overleftrightarrow{بو}$ مماس عند ب قطع $\overrightarrow{أجـ}$ فى و ، $\overrightarrow{أء}$ فى هـ
فإذا كان ق(∠و) = ٣٠°
أثبت أن : الشكل جـ و هـ ء رباعى دائرى

الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م
∴ ق(∠أجـ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة
∵ جـ ∈ $\overline{أو}$ ∴ ق(∠وجـ ب) = ١٨٠ - ٩٠ = ٩٠°
∴ △ وجـ ب قائم الزاوية فى جـ
∴ ق(∠وبجـ) = ١٨٠ - (٣٠ + ٩٠) = ٦٠°
∵ $\overleftrightarrow{وب}$ مماس للدائرة م عند ب
∵ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{وب}$ ∴ ق(∠أبو) = ٩٠°
∴ ق(∠أبجـ) = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠°
∴ ق(∠جـ ء أ) = ق(∠جـ ب أ) = ٣٠° محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{أجـ}$
∴ ق(∠جـ ء أ) = ق(∠و) = ٣٠° وهى خارجة عن الشكل الرباعى جـ و هـ ء
∴ الشكل جـ و هـ ء رباعى دائرى

١٢- فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م ، $\overline{جـ ء}$ قطر عمودى على $\overline{أب}$ ويقطعه فى س ، $\overrightarrow{بم}$ يقطع الدائرة فى و ، $\overline{وجـ}$ ∩ $\overline{أب}$ = {هـ}
أثبت أن : ① الشكل ء و هـ س رباعى دائرى
② ق(∠جـ هـ س) = ق(∠جـ ب و)

الحل

∵ $\overline{جـ ء}$ قطر فى الدائرة م
∴ ق(∠جـ و ء) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة
∵ $\overline{ءجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق(∠ء س ب) = ٩٠°
∴ ق(∠ء س ب) = ق(∠و) = ٩٠° وهى خارجة عن الشكل ء و هـ س
∴ الشكل ء و هـ س رباعى دائرى

∴ الشكل ء و هـ س رباعي دائري

∴ م(∠ د هـ س) = م(∠ ء) خارجة عن الرباعي الدائري ...... ①

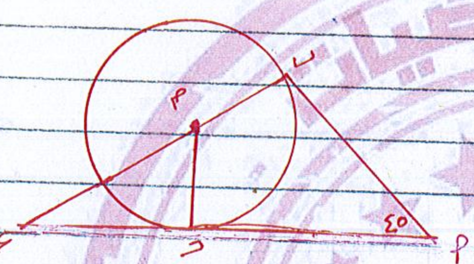
م(∠ د ن ق) = م(∠ ء) محيطيتان تحصران د و ...... ②

من ①، ② ∴ م(∠ د هـ س) = م(∠ د ن ق)

١٣- في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م عند ب ، جـ

م(∠ أ) = ٤٥° ، ب م ∩ $\overleftrightarrow{أجـ}$ = {ء}



اثبت أن: ① الشكل أ ب م جـ رباعي دائري

② جـ ء = جـ م

الحل

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ $\overline{مب}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ م(∠ أ ب م) = ٩٠°

∵ $\overline{أجـ}$ مماس للدائرة م عند جـ ∴ $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

∴ م(∠ أ جـ م) = ٩٠°

∴ م(∠ أ ب م) + م(∠ أ جـ م) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب م جـ رباعي دائري

∴ م(∠ ء م جـ) = م(∠ أ) = ٤٥ خارجة عن الرباعي الدائري

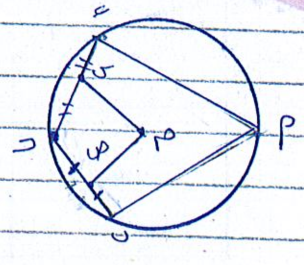
في △ أ ب ء القائم في ب ∴ م(∠ ء) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٥) = ٤٥

∴ م(∠ جـ م ء) = م(∠ جـ ء م) = ٤٥ ∴ جـ ء = جـ م

١٤- في الشكل المقابل:

أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م ،

ص منتصف $\overline{بجـ}$ ، س منتصف جـ ء



اثبت أن: ① الشكل م س جـ ص رباعي دائري

② م(∠ س م ص) = م(∠ ب أ ء)

الحل:

∵ ص منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ $\overline{مص}$ ⊥ ب جـ

∴ م(∠ م ص جـ) = ٩٠°

∴ م(∠ م س جـ) + م(∠ م ص جـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∵ الشكل م س د ص رباعي دائري

∴ ق(∠م) + ق(∠د) = ١٨٠° ...... (١)

∵ أ ب ج د رباعي دائري

∴ ق(∠أ) + ق(∠د) = ١٨٠° ...... (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠أ) = ق(∠م)

١٥- في الشكل المقابل:

دائرتان متقاطعتان في أ، ب

$\overline{جد}$ يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرتين في ج، د

$\overrightarrow{جهـ} \cap \overrightarrow{دو}$ = {س}

أثبت أن: أ و س هـ شكل رباعي دائري

العمل: نرسم $\overline{أب}$

البرهان:

∵ هـ ج ب أ رباعي دائري

∴ ق(∠س هـ أ) = ق(∠أ ب ج) خارجة عن الرباعي الدائري ...... (١)

∵ أ ب د و رباعي دائري

∴ ق(∠س و أ) = ق(∠أ ب د) خارجة عن الرباعي الدائري ...... (٢)

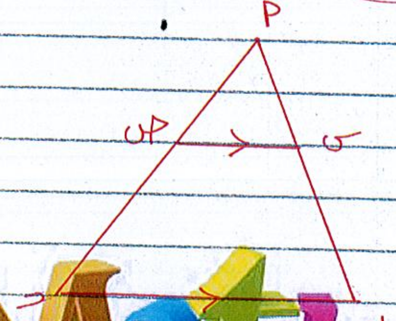
∵ ب ∈ $\overline{جد}$

∴ ق(∠أ ب ج) + ق(∠أ ب د) = ١٨٠° ...... (٣)

بالتعويض من (١)، (٢) في (٣)

∴ ق(∠س هـ أ) + ق(∠س و أ) = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ و س هـ رباعي دائري



١٦- في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ ج، س ∈ $\overline{أب}$

ص ∈ $\overline{أج}$ بحيث $\overline{سص}$ // $\overline{بج}$

أثبت أن: الشكل س ب ج ص رباعي دائري

٣٩

الحل

∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ...(١)

∵ س ص // ب جـ، أب قاطع لهما

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠ب) بالتناظر ...(٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠جـ)

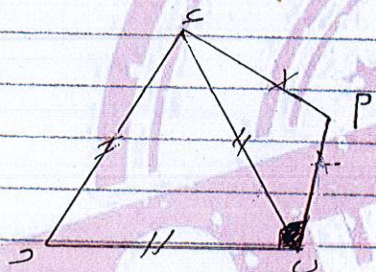
وهي خارجة عن الشكل س ب جـ ص ∴ الشكل س ب جـ ص رباعي دائري

١٧- في الشكل المقابل:

أ ب جـ د شكل رباعي فيه أب ⊥ ب جـ، أب = أد،

ب جـ = جـ د = د ب

أثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعي دائري



الحل

في △ ب جـ د

∵ ب جـ = جـ د = د ب

∴ ق(∠د ب جـ) = ق(∠جـ) = ق(∠ب د جـ) = ٦٠°

∵ أب ⊥ ب جـ

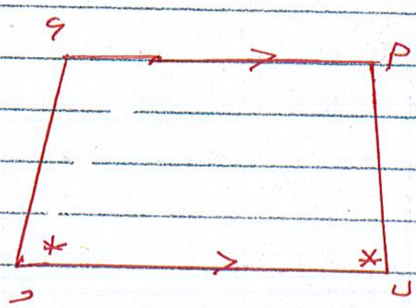
∴ ق(∠أ ب د) = ٩٠ − ٦٠ = ٣٠°

في △ أ ب د ∵ أب = أد ∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ ب د) = ٣٠°

∴ ق(∠ب أ د) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري



١٨- في الشكل المقابل: أد // ب جـ، ق(∠ب) = ق(∠جـ)

أثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

الحل: ∵ أد // ب جـ، أب قاطع لهما

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٨٠ ...(١)

∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ...(٢) بالتعويض من (١) في (٢)

∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠° وهما متقابلتان

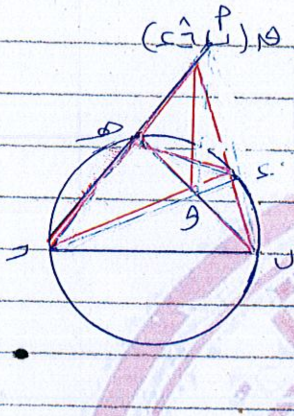
∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

١٩- فى الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث رسمت دائرة قطرها $\overline{بج}$ وتقطع $\overline{أب}$ فى ء ، $\overline{أج}$ فى نقطة ه

فإذا كان $\overline{به} \cap \overline{جء} = \{و\}$

البرهان: ① أ ء و ه شكل رباعى دائرى ② م(ء أ̂ و) = م(ب ج̂ ء)



الحل

∵ ب ج قطر فى الدائرة م

∴ م(ب ء̂ ج) = م(ب ه̂ ج) = ٩٠ (مرسومتان فى نصف دائرة)

∵ ء ∈ $\overline{أب}$ ∴ م(أ ء̂ و) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°،

∵ ه ∈ $\overline{أج}$ ∴ م(أ ه̂ و) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

∴ م(أ ء̂ ج) + م(أ ه̂ و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

وهما متقابلتان ∴ الشكل أ ء و ه رباعى دائرى

∵ الشكل أ ء و ه رباعى دائرى

∴ م(ء أ̂ و) = م(ء ه̂ و) مرسومتان على ء و ... ①

∴ م(ب ج̂ ء) = م(ب ه̂ ء) محيطيتان تحصران ب ء ... ②

من ①، ② ∴ م(ء أ̂ و) = م(ب ج̂ ء)

٢٠- فى الشكل المقابل:

دائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب رسم الوتر $\overline{أء}$ فى الدائرة ن فإذا كانت س منتصف $\overline{أء}$

$\overline{أب} \cap \overline{من} = \{ص\}$

البرهان: الشكل أ س ن ص رباعى دائرى

الحل

م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب

∴ $\overline{من}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ م(أ ص̂ ن) = ٩٠°

∵ س منتصف $\overline{أء}$ ∴ $\overline{ن س}$ ⊥ $\overline{أء}$

∴ م(أ س̂ ن) = ٩٠°

∴ م(أ ص̂ ن) + م(أ س̂ ن) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ س ن ص رباعى دائرى

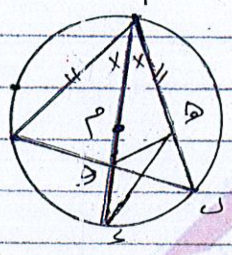
٤٨

١٢- في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران في الدائرة م ، $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، هـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث أ هـ = أ جـ

اثبت أن: ق(∠ د ب و) = ق(∠ د هـ و)

الحل



△△ أ هـ و ، أ جـ و

فيهما { أ هـ = أ جـ
أ و ضلع مشترك
ق(∠ هـ أ و) = ق(∠ جـ أ و) ($\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ)

∴ △ أ هـ و ≡ △ أ جـ و

وينتج من التطابق أن: ق(∠ أ هـ و) = ق(∠ أ جـ و) ...... ①

∵ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ د ب) محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{أب}$ ...... ②

من ①، ②

∴ ق(∠ أ هـ و) = ق(∠ و د ب) وهي خارجة عن الشكل هـ ب د و

∴ الشكل هـ ب د و رباعي دائري

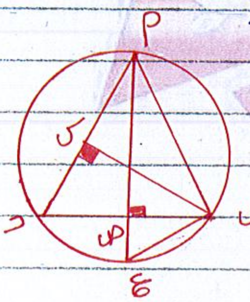
∴ ق(∠ د ب و) = ق(∠ د هـ و)

٢٢- في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{بس}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أص}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ يقطعه في ص ويقطع الدائرة في ع

اثبت أن: ① الشكل أ ب ص س رباعي دائري ② $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠ س ب ع

الحل



∵ $\overline{بس}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ∴ ق(∠ أ س ب) = ٩٠°،

∵ $\overline{أص}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ ∴ ق(∠ أ ص ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ س ب) = ق(∠ أ ص ب) = ٩٠° وهما مرسومتان على $\overline{أب}$

∴ الشكل أ ب ص س رباعي دائري

∵ الشكل أ ب ص س رباعي دائري

∴ ق(∠ ص ب س) = ق(∠ ص أ س) مرسومتان على $\overline{سص}$ ...... ①

∵ ق(∠ ع ب جـ) = ق(∠ ع أ جـ) محيطيتان على $\overset{\frown}{عجـ}$ ...... ②

من ①، ②

∴ ق(∠ ع ب جـ) = ق(∠ جـ ب س)

∴ $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠ س ب ع

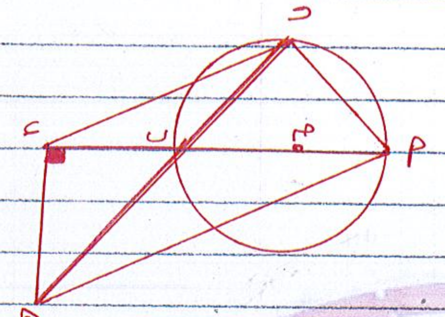
(٤٣)

٤٣- في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، ء ∈ $\overrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ} \perp \overline{أب}$ ،

$\overrightarrow{دب} \cap \overleftrightarrow{ءهـ} = \{هـ\}$

أثبت أن: أ د ء هـ شكل رباعي دائري



الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أدب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ $\overleftrightarrow{ءهـ} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠أءهـ) = ٩٠°

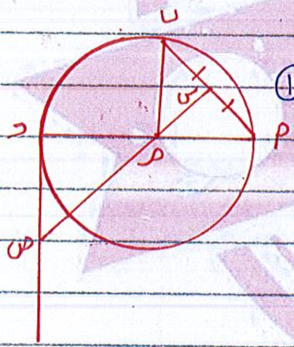
∴ ق(∠أدهـ) = ق(∠أءهـ) = ٩٠° وهما مرسومتان على أهـ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أدءهـ رباعي دائري

٤٤- في الشكل المقابل:

أج قطر في الدائرة م ، س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جص}$ مماس للدائرة قطع $\overrightarrow{مس}$ في ص

أثبت أن: ① الشكل أ س ج ص رباعي دائري ② ق(∠ب م ج) = ٢ق(∠م ص ج)



الحل

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠أسص) = ٩٠° ...①

∵ $\overleftrightarrow{جص}$ مماس للدائرة م عند ج

∴ $\overleftrightarrow{جص} \perp \overline{مج}$ ∴ ق(∠أجص) = ٩٠° ...②

من ①، ② ∴ ق(∠أسص) = ق(∠أجص)

وهما مرسومتان على أص وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أسجص رباعي دائري

∴ ق(∠سأج) = ق(∠سصج) مرسومتان على $\overline{سج}$

∴ ق(∠بأج) = ق(∠مصج) ...③

∵ ق(∠بمج) = ٢ق(∠بأج) محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{بج}$ ...④

من ③، ④

∴ ق(∠بمج) = ٢ق(∠مصج)

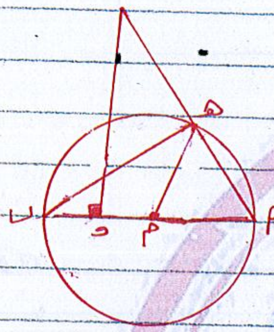
(٤٣)

٤٤

٢٥- في الشكل المقابل:
$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، م هـ وتر فيها ، رسم $\overleftrightarrow{جد} \perp \overline{أب}$ فقطع $\overleftrightarrow{أهـ}$ في ء

أثبت أن: ① النقط ء ، هـ ، د ، ب يمر بها دائرة واحدة ② ق ($\angle$ أ م هـ) = ٢ ق ($\angle$ ء)

الحل



∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق ($\angle$ أ هـ ب) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة)

∵ هـ ∈ $\overline{أء}$ ∴ ق ($\angle$ ء هـ ب) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠° ... ①

∵ $\overleftrightarrow{جد} \perp \overline{أب}$ ∴ ق ($\angle$ ء د ب) = ٩٠° ... ②

من ①، ② ∴ ق ($\angle$ ء هـ ب) = ق ($\angle$ ء د ب)

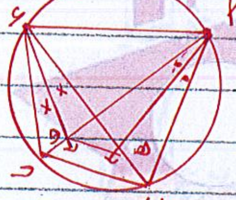
وهما مرسومتان على $\overline{ءب}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ء هـ د ب رباعي دائري

∴ ق ($\angle$ أ ب هـ) = ق ($\angle$ ء) مرسومتان على $\overline{هـ د}$ ... ③

∵ ق ($\angle$ أ م هـ) = ٢ ق ($\angle$ أ ب هـ) محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{أهـ}$ ... ④

من ③، ④ ∴ ق ($\angle$ أ م هـ) = ٢ ق ($\angle$ ء)



٢٦- في الشكل المقابل:
أ ب ج ء شكل رباعي دائري فيه $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف $\angle$ ب أ ج ، $\overrightarrow{ءو}$ ينصف $\angle$ ب ء ج

أثبت أن: ① أ هـ و ء شكل رباعي دائري ② $\overline{هـ و} \parallel \overline{ب ج}$

الحل

∵ أ ب ج ء رباعي دائري

∴ ق ($\angle$ ب أ ج) = ق ($\angle$ ب ء ج) ... ①

∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف $\angle$ ب أ ج

∴ ق ($\angle$ هـ أ و) = $\frac{1}{2}$ ق ($\angle$ ب أ ج) ... ②

∵ $\overrightarrow{ءو}$ ينصف $\angle$ ب ء ج

∴ ق ($\angle$ هـ ء و) = $\frac{1}{2}$ ق ($\angle$ ب ء ج) ... ③

من ١، ٢، ٣

∴ ق ($\angle$ هـ أ و) = ق ($\angle$ هـ ء و)

وهما مرسومتان على $\overline{هـ و}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ هـ و ء رباعي دائري

∴ ق ($\angle$ ء أ و) = ق ($\angle$ ء هـ و) مرسومتان على $\overline{ءو}$

∴ ق ($\angle$ ء أ ج) = ق ($\angle$ ء هـ و) ... ④

∵ الشكل أ ب ج ء رباعي دائري

∴ ق ($\angle$ ء أ ج) = ق ($\angle$ ء ب ج) ... ⑤

من ٤، ٥

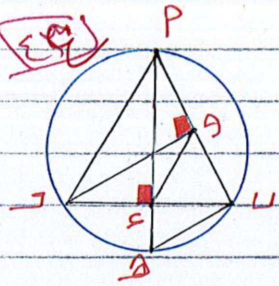
∴ ق ($\angle$ ء هـ و) = ق ($\angle$ ء ب ج)

وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{هـ و} \parallel \overline{ب ج}$

①

(٤٣)



في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أد}$ ⊥ $\overline{بج}$ يقطعها في د ويقطع الدائرة في هـ ، $\overleftrightarrow{جو}$ ⊥ $\overline{أب}$ يقطعها في و

اثبت أن:

① الشكل أ و د ج رباعي دائري

② ق(∠هـ ب ج) = ق(∠ء و ج)

الحل: ∵ $\overleftrightarrow{أد}$ ⊥ $\overline{بج}$

∴ ق(∠أ و ج) = ٩٠° ......①

∵ $\overleftrightarrow{جو}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ (∠أ د ج) = ٩٠° ......②

من ①، ② ∴ ق(∠أ و ج) = ق(∠أ د ج) = ٩٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ و د ج رباعي دائري (أولاً)

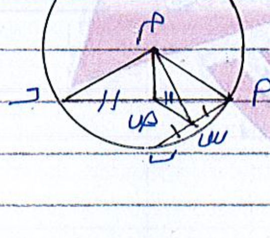
∴ ق(∠د و ج) = ق(∠د أ ج) مرسومتان على $\overline{دج}$

∴ ق(∠د و ج) = ق(∠هـ أ ج) ......③

∵ ق(∠هـ ب ج) = ق(∠هـ أ ج) محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{هـ ج}$ ......④

من ③، ④ ∴ ق(∠هـ ب ج) = ق(∠د و ج)

دائرة مركزها م ، س، ص منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ على الترتيب



اثبت أن ① الشكل أ س ص م رباعي دائري

② ق(∠م س ص) = ق(∠م ج ص)

③ $\overline{أم}$ قطر في الدائرة المار بالنقط أ، س، ص، م

الحل: ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$

∵ ص منتصف $\overline{أج}$ ∴ $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{أج}$

∴ ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = ٩٠°

وهو مرسومتان على $\overline{أم}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ س ص م رباعي دائري

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م أ ص) ......①

في △ م أ ج

∵ م ج = م أ = نق

∴ ق(∠م أ ج) = ق(∠م ج أ) ......②

من ① و ②

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ج ص) (ثانياً)

∵ ق(∠أ س م) = ٩٠°

وهي مرسومة على $\overline{أم}$

∴ $\overline{أم}$ قطر في الدائرة المارة برءوس الشكل أ س ص م

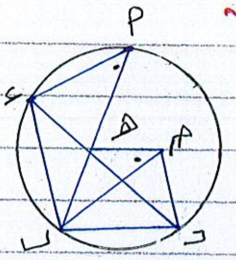
(٤)

$\overline{أب}$ ، $\overline{جد}$ وتران في الدائرة م ، $\overline{أب} \cap \overline{جد} = \{هـ\}$

ق(∠ب أ د) = ق(∠ب م هـ)

أثبت أن: ① الشكل م جـ ب هـ رباعي دائري

② ق(∠جـ هـ ب) = ٢ ق(∠جـ د ب)



الحل:

∵ ق(∠ب أ د) = ق(∠ب م هـ) .... ① معطى

، ق(∠ب جـ د) = ق(∠ب أ د) .... ② محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{ب د}$

من ① ، ②

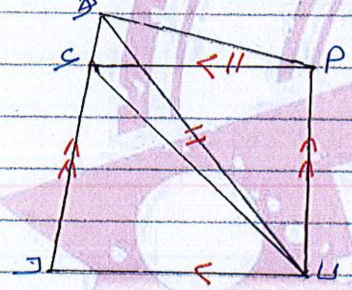
∴ ق(∠ب جـ هـ) = ق(∠ب م هـ) وهما مرسومتان على $\overline{ب هـ}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل م جـ ب هـ رباعي دائري

∴ ق(∠جـ هـ ب) = ق(∠جـ م ب) مرسومتان على $\overline{ب جـ}$ .... ③

∵ ق(∠جـ م ب) = ٢ ق(∠جـ د ب) محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{ب جـ}$ .... ④

من ③ ، ④ ∴ ق(∠جـ هـ ب) = ٢ ق(∠جـ د ب)



في الشكل المقابل:

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overrightarrow{جـ د}$ حيث ب هـ = أ د

أثبت أن الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

الحل

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) .... ①

، أ د = ب جـ

∵ أ د = ب هـ معطى

∴ ب جـ = ب هـ

في △ ب جـ هـ ∵ ب جـ = ب هـ

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب هـ جـ) .... ②

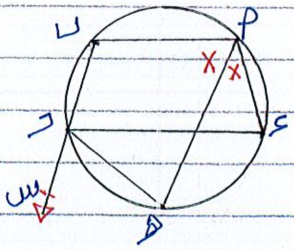
من ① ، ②

∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠ب هـ د)

وهما مرسومتان على $\overline{ب د}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

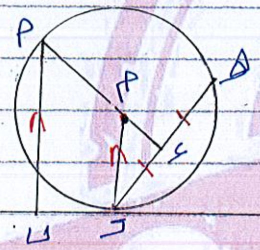
٤٦



أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة
أ هـ ينصف ∠ د أ ب و يلاقي الدائرة هـ
اثبت أن: جـ هـ ينصف ∠ س جـ د

الحل

∵ الشكل أ ب جـ هـ رباعي دائري ∠ س جـ هـ خارجة عنه
∴ ق(∠ س جـ هـ) = ق(∠ ب أ هـ) .... (١)
∵ ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ د جـ هـ) .... (٢) محيطيتان تحصران د هـ
∵ أ هـ ينصف ∠ د أ ب ∴ ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ هـ أ ب) .... (٣)
من (١)، (٢)، (٣) ∴ ق(∠ د جـ هـ) = ق(∠ هـ جـ س)
∴ جـ هـ ينصف ∠ س جـ د



في الشكل المقابل:
م دائرة ، ء منتصف هـ جـ
ب جـ مماس للدائرة م عند جـ ، أ ب // م جـ

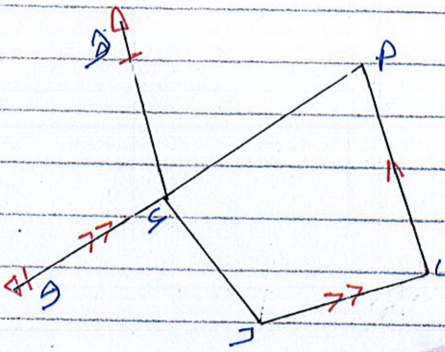
اثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

الحل

∵ ء منتصف هـ جـ ∴ م ء ⊥ هـ جـ
∴ ق(∠ م ء جـ) = ٩٠° .... (١)
∵ ب جـ مماس للدائرة م عند جـ ∴ م جـ ⊥ ب جـ
∴ ق(∠ م جـ ب) = ٩٠°
∵ أ ب // م جـ
∴ ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ م جـ ب) = ١٨٠ بالتداخل
∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°
∵ ق(∠ أ ء جـ) + ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°
وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٤٧



- في الشكل المقابل

$\overline{أب} \parallel \overline{ءهـ}$ ، $\overline{بجـ} \parallel \overline{ءو}$

ق($\angle$ أءهـ) + ق($\angle$ جـءو) = ١٨٠°

اثبت أن الشكل أبجـء رباعى دائرى

الحل

∵ $\overline{أب} \parallel \overline{ءهـ}$ ، $\overline{أء}$ قاطع لهما

∴ ق($\angle$ بأء) = ق($\angle$ أءهـ) ....① (بالتبادل)

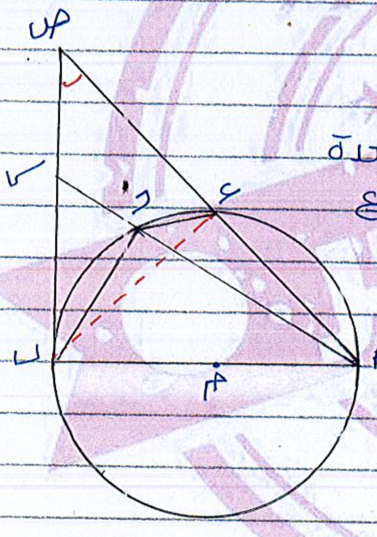
∵ $\overline{بجـ} \parallel \overline{ءو}$ ، $\overline{جـء}$ قاطع لهما

∴ ق($\angle$ بجـء) = ق($\angle$ جـءو) ....② (بالتبادل)

∵ ق($\angle$ أءهـ) + ق($\angle$ جـءو) = ١٨٠° ....③ (معطى)

من ①،②،③ ∴ ق($\angle$ بأء) + ق($\angle$ بجـء) = ١٨٠°

وهما متقابلتان ∴ الشكل أبجـء رباعى دائرى



في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أء}$ وتران فيها وفي جهة واحدة من $\overline{أب}$ رسم من ب مماس للدائرة فقطع $\overrightarrow{أجـ}$ في س وقطع $\overrightarrow{أء}$ في ص

أثبت أن الشكل س ص ء جـ رباعى دائرى

الحل العمل: نصل $\overline{بء}$

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق($\angle$ أءب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

في Δ أءب القائم في ء ∴ $\angle$ ءبأ تتمة $\angle$ بأء

∵ ق($\angle$ ءجـأ) = ق($\angle$ ءبأ) محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{أء}$

∴ $\angle$ ءجـأ تتمة $\angle$ بأء ....①

∵ $\overleftrightarrow{بص}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ ق($\angle$ أبص) = ٩٠°

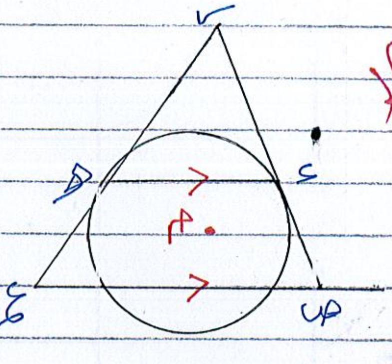
في Δ أبص القائم في ب

∴ $\angle$ ص تتمة $\angle$ صأب ....②

∴ ق($\angle$ ءجـأ) = ق($\angle$ ص)

وهى خارجة عن الشكل الرباعى س ص ء جـ

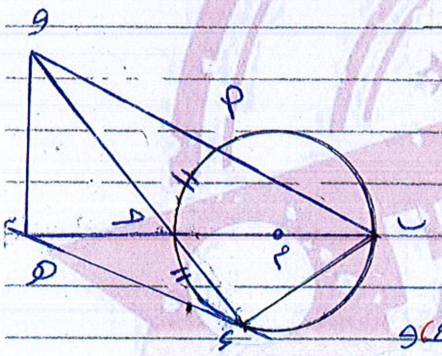
∴ الشكل س ص ء جـ رباعى دائرى



(٤١)

في الشكل المقابل
س ص ، س ع تماس الدائرة م عند د ، هـ
فإذا كانت د هـ // ص ع
اثبت أن الشكل د ص ع هـ رباعي دائري

الحل
∵ س ص ، س ع تماس الدائرة عند د ، هـ
∴ س د = س هـ
∴ ق(∠ س د هـ) = ق(∠ س هـ د) .... (1)
∵ د هـ // ص ع
∴ ق(∠ س د هـ) = ق(∠ ص) (بالتناظر) .... (2)
من (1) ، (2) ∴ ق(∠ س هـ د) = ق(∠ ص)
وهي خارجة عن الرباعي د ص ع هـ ∴ الشكل د ص ع هـ رباعي دائري

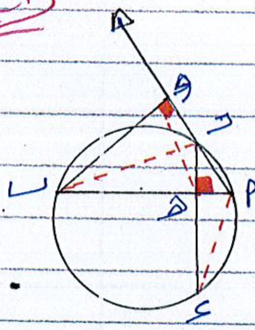


في الشكل المقابل الدائرة
ب ج قطر في الدائرة م ، ق(⌒ج أ) = ق(⌒ج د)
د هـ مماس للدائرة عند د ، قطع ب ج في هـ
د ج ∩ ب أ = {و} برهن أن ب د هـ و رباعي دائري
ثم أوجد (1) ق(∠ ب هـ و)
(2) وضع أن ب و قطر الدائرة المارة بالنقط ب ، د ، هـ ، و

الحل
∵ ق(⌒د ج) = ق(⌒ج أ)
∴ ق(∠ د ب ج) = ق(∠ ج ب أ) .... (1) محيطيتان تحصران ⌒د ج ، ⌒ج أ
∵ د هـ مماس للدائرة عند د
∴ ق(∠ هـ د و) = ق(∠ د ب هـ) .... (2) محيطية ومماسية تحصران ⌒د ج
من (1) ، (2) ∴ ق(∠ هـ د و) = ق(∠ هـ ب و)
وهما مرسومتان على هـ و وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل ب د هـ و رباعي دائري (أولاً)
∵ ب ج قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ ب د ج) = ٩٠°
∵ ب د هـ و رباعي دائري ∴ ق(∠ ب هـ و) = ق(∠ ب د و) = ٩٠°
∵ ق(∠ ب د و) = ٩٠° ∴ ∠ ب د و مرسومة في نصف دائرة (ثانياً)
∴ ب و قطر في هذه الدائرة

٤٩

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـد}$ وتران في دائرة متعامدان ومتقاطعان في هـ
رسم $\overline{بو}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أجـ}$ قطعه في و ، و ∉ $\overline{أجـ}$ أثبت أن

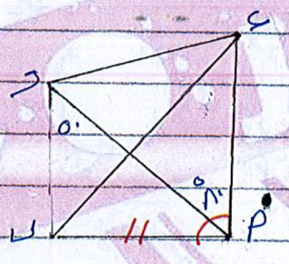


① الشكل و جـ هـ ب رباعي دائري
② ق(∠ب و هـ) = ق(∠ب أ د) (الجيزة ٢٠١٦)

الحل

∵ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{جـد}$ ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠°
∵ $\overline{بو}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ∴ ق(∠أ و ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ هـ جـ) = ق(∠جـ و ب) = ٩٠°
وهي خارجة عن الرباعي جـ هـ ب و
∴ الشكل جـ هـ ب و رباعي دائري (أولاً)
∴ ق(∠ب و هـ) = ق(∠ب جـ هـ)
∵ ق(∠ب جـ د) = ق(∠ب أ د) محيطتان تحصران $\overset{\frown}{ب د}$
∴ ق(∠ب و هـ) = ق(∠ب أ د) (ثانياً)

في الشكل المقابل



أب = أد ، ق(∠د أ ب) = ٨٠° ، ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°

أثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

الحل

في △ أ ب د ∵ أد = أب

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ ب د) = $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠°$

∵ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{أب}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

العلاقة بين مماسات الدائرة

٥٠٠

* المماسات المرسومات من نهايتي قطر في الدائرة متوازيان

* المماسات المرسومات من نهايتي وتر في الدائرة متقاطعان

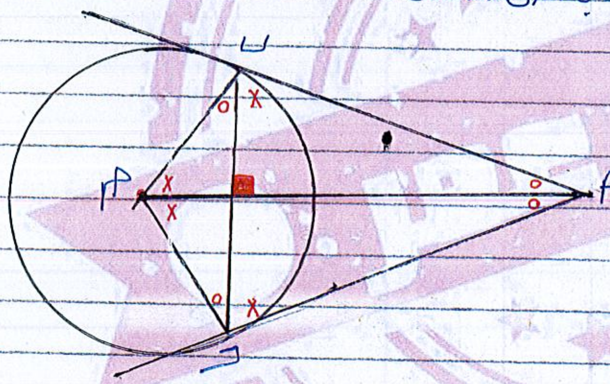
نظرية (٤)

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول

نتائج هامة

① المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها خارج الدائرة يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين

② المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس.



أي أن

إذا كانت $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أج}$ مماسات للدائرة م

عند ب ، ج فإن

① أب = أج

② $\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{بج}$

③ ق(∠ب أ م) = ق(∠ج أ م)

④ ق(∠أ م ب) = ق(∠أ م ج)

⑤ الشكل أ ب م ج رباعي دائري

لأن ق(∠أ ب م) = ق(∠أ ج م) = 90° (المماس عمودي على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس)

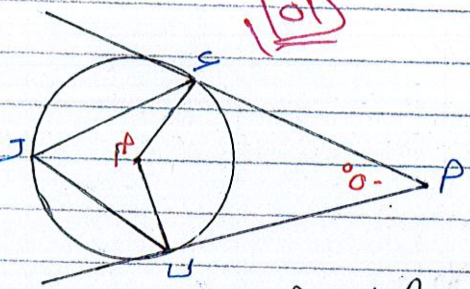
⑥ ق(∠ب أ م) = ق(∠ب ج م) مرسومتان على $\overline{بم}$

⑦ ق(∠أ ب ج) = ق(∠أ م ج) مرسومتان على $\overline{أج}$

⑧ △ أ ب ج متساوي الساقين (أب = أج)

⑨ △ م ب ج متساوي الساقين (م ب = م ج = نق)

(٥١) العلاقة بين مماسات الدائرة



في الشكل المقابل

أء ، أب قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠أ) = ٥٠°

① أثبت أن الشكل أ ء م ب رباعي دائري

② أوجد ق(∠ء م ب) ، ق(∠ء جـ ب)

الحل

∵ أء مماس للدائرة م عند ء ∴ مء ⊥ أء ∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°

∵ أب مماس للدائرة م عند ب ∴ مب ⊥ أب ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

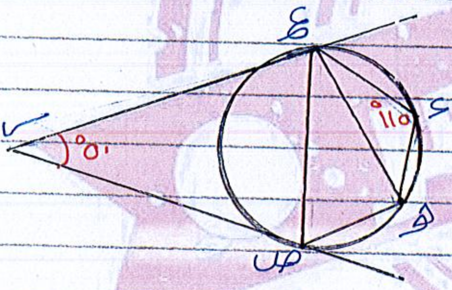
∵ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ ء م) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب م ء رباعي دائري (أولاً)

∴ ق(∠أ) + ق(∠ء م ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ء م ب) = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠° (ثانياً)

∴ ق(∠ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ء م ب) = ٦٥° محيطية ومركزية تحصران ⌒ب ء (ثالثاً)



في الشكل المقابل

س ص ، س ع مماسان للدائرة عند ص ، ع

ق(∠ص س ع) = ٥٠° ، ق(∠هـ ء ع) = ١١٥°

أثبت أن ① ص ع ينصف ∠هـ ص س ② س ع // ص هـ

الحل

∵ س ع ، س ص قطعتان مماستان للدائرة

∴ س ع = س ص

في ∆ س ص ع ∵ س ع = س ص ∴ ق(∠ع ص س) = ق(∠س ع ص) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°

∵ الشكل ء هـ ص ع رباعي دائري

∴ ق(∠ء) + ق(∠هـ ص ع) = ١٨٠° (متقابلتان)

∴ ق(∠هـ ص ع) = ١٨٠ − ١١٥ = ٦٥°

∵ ق(∠هـ ص ع) = ق(∠ع ص س) = ٦٥°

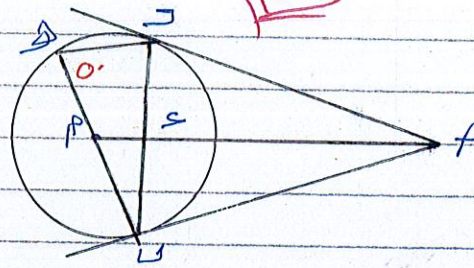
∴ ص ع ينصف ∠هـ ص س أولاً

∴ ق(∠هـ ص ع) = ق(∠ص ع س) = ٦٥° وهما في وضع تبادل

∴ س ع // ص هـ

١٥٣

العلاقة بين مماسات الدائرة



في الشكل المقابل :

$\overline{ب هـ}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، ج ، $\overline{أم} \cap \overline{ب ج} = \{ء\}$

ق(∠ب هـ ج) = 50°

أوجد ق(∠أ) ، أثبت أن $\overline{هـ ج} \parallel \overline{أم}$

الحل

∵ $\overline{أج}$ مماس للدائرة م عند ج

∴ ق(∠أ ج ب) = ق(∠ج هـ ب) = 50° مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{ب ج}$

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان

∴ أب = أج ∴ ق(∠أ ب ج) = ق(∠أ ج ب)

∴ ق(∠أ) = $180 - (50 + 50) = 80^\circ$ (أولاً)

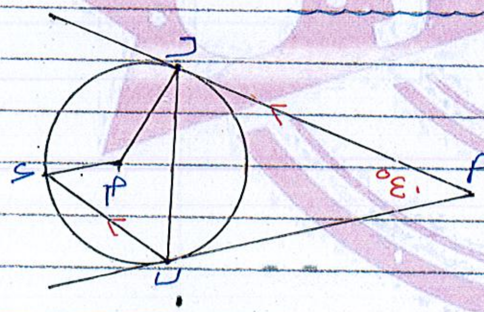
∵ $\overline{ب هـ}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ب ج هـ) = 90° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ $\overline{أم} \perp \overline{ب ج}$ ∴ ق(∠أ ء ج) = 90°

∴ ق(∠أ ء ج) = ق(∠هـ ج ء) = 90° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{ج هـ} \parallel \overline{أم}$



$\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أج}$ مماسان للدائرة م ، $\overline{ب ء} \parallel \overline{أج}$

، ق(∠ب أ ج) = 40°

① أوجد ق(∠أ ج ب) ، ق(∠ج م ء)

② أثبت أن $\overline{ب ج}$ ينصف ∠أ ب ء

الحل

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان

∴ ق(∠أ ب ج) = ق(∠أ ج ب) = $\frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$

∵ $\overline{أج} \parallel \overline{ب ء}$

∴ ق(∠أ ج ب) = ق(∠ج ب ء) = 70° بالتبادل

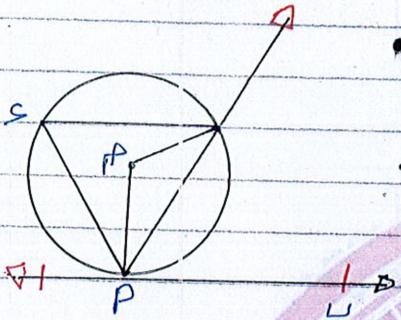
∴ ق(∠ج م ء) = 2 ق(∠ج ب ء) = 140° محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{ج ء}$

∴ $\overline{ب ج}$ ينصف ∠أ ب ء

٥٣

* الزاوية المماسية *

هى الزاوية المكونة من إتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والآخر يحتوى وتراً فى الدائرة مارة بنقطة التماس



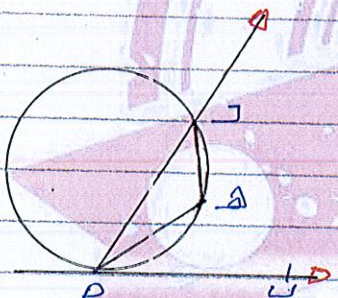
نظرية (٥)

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

نتيجة (١)

قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

أى أن فى الشكل المقابل :-



ق(ب $\hat{أ}$ جـ) المماسية = ق ($\hat{د}$) (المحيطية)

ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ $\hat{م}$ جـ) (المركزية)

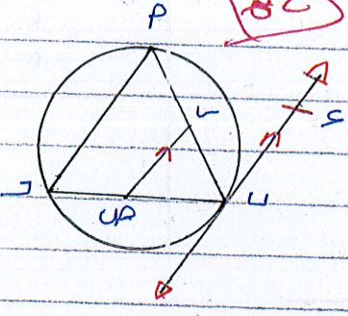
ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$)

ق(ب $\hat{أ}$ جـ) + ق(أ $\hat{هـ}$ جـ) = 180°

١١

٥٤

* الزاوية المماسية *



في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{ب ى}$ مماس للدائرة عند ب ، س ∈ $\overline{أ ب}$ ، ص ∈ $\overline{ب جـ}$

حيث $\overline{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب ى}$

اثبت أن الشكل أ س ص ى رباعي دائري

الحل

∵ $\overleftrightarrow{ب ى}$ مماس للدائرة عند ب

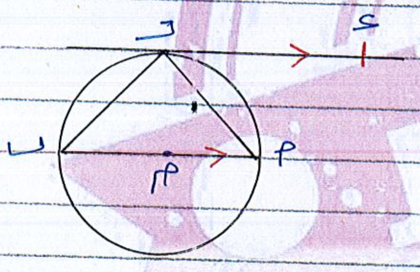
∴ ق(∠ع ب أ) = ق(∠ب جـ أ) ...... ① مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{ب أ}$

∵ $\overleftrightarrow{ب ى}$ // $\overline{س ص}$ ، $\overline{أ ب}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ى ب أ) = ق(∠ب س ص) بالتبادل ...... ②

من ① ، ② ∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠ب جـ أ)

وهي خارجة عن الرباعي أ س ص جـ ∴ الشكل أ س ص جـ رباعي دائري



$\overline{أ ب}$ قطر في دائرة محيطها ٤٤ سم ، $\overleftarrow{جـ ى}$ مماس لها عند جـ ، $\overleftarrow{جـ ى}$ // $\overline{ب أ}$

أوجد مع البرهان ① ق(∠ى جـ أ) ② طول $\overset{\frown}{أ جـ}$

البرهان :

∵ $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

، $\overleftarrow{جـ ى}$ // $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ى جـ أ) = ق(∠جـ أ ب) بالتبادل ...... ①

∵ $\overleftarrow{جـ ى}$ مماس للدائرة عند جـ

∴ ق(∠ى جـ أ) = ق(∠أ ب جـ) مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{أ جـ}$ ...... ②

من ① ، ②

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠جـ ب أ) = $\frac{١٨٠ - ٩٠}{٢}$ = ٤٥°

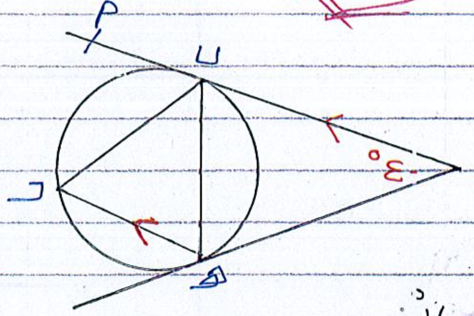
∴ ق(∠ى جـ أ) = ٤٥° أولاً

∴ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ٢ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ طول ($\overset{\frown}{أ ب}$) = $\frac{ق(\overset{\frown}{أ ب})}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٤٤ = ١١ سم

* الزاوية المماسية *

مثال ١: في الشكل المقابل



د ب ، د هـ مماسان للدائرة عند ب ، هـ

د ب // هـ جـ ، ق(د̂) = ٤٠° أوجد ق(أ ب̂ جـ)

الحل

∵ د ب ، د هـ قطعتان مماستان

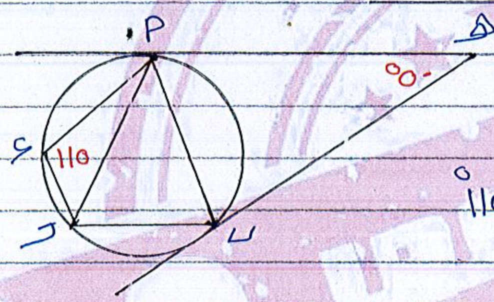
∴ د ب = د هـ

∴ ق(د ب̂ هـ) = ق(د هـ̂ ب) = $\frac{١٨٠-٤٠}{٢}$ = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∵ د ب // هـ جـ ∴ ق(جـ هـ̂ ب) = ق(د ب̂ هـ) = ٧٠° بالتبادل

∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(ب هـ̂ جـ) = ٧٠° محيطية ومماسية تحصران ب جـ

مثال ٢: في الشكل المقابل



أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة،

هـ أ ، هـ ب مماسان للدائرة عند أ ، ب

فإذا كان ق(أ هـ̂ ب) = ٥٠° ، ق(أ د̂ جـ) = ١١٥°

اثبت أن أ ب = أ جـ ، هـ أ // ب جـ

الحل

∵ هـ أ ، هـ ب قطعتان مماستان للدائرة

∴ هـ أ = هـ ب

∴ ق(هـ أ̂ ب) = ق(هـ ب̂ أ) = $\frac{١٨٠-٥٠}{٢}$ = $\frac{١٣٠}{٢}$ = ٦٥°

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ق(هـ أ̂ ب) = ٦٥° محيطية ومماسية تحصران أ ب

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(أ ب̂ جـ) + ق(أ د̂ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(أ ب̂ جـ) = ١٨٠ − ١١٥ = ٦٥°

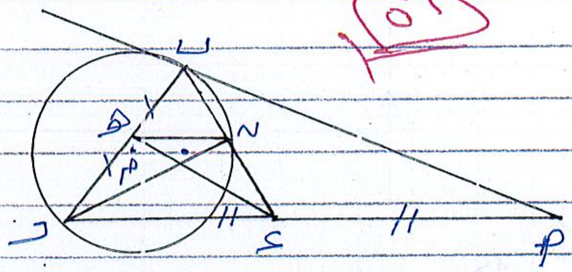
في △ أ ب جـ ∵ ق(أ جـ̂ ب) = ق(أ ب̂ جـ) = ٦٥°

∴ أ ب = أ جـ (أولاً)

∵ ق(هـ أ̂ ب) = ق(أ ب̂ جـ) = ٦٥° وهما في وضع تبادل

∴ هـ أ // ب جـ (ثانياً)

* الزاوية المماسية * (56)



في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أجـ}$ قاطع لها

ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$

اثبت أن ① $\overline{أب} \parallel \overline{ءهـ}$

② الشكل ب ء جـ هـ رباعي دائري

الحل

في $\triangle$ أ ب جـ

∵ ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{أب} \parallel \overline{ءهـ}$ (أولاً)

∵ $\overline{أب} \parallel \overline{ءهـ}$ ∴ ق(∠أبء) = ق(∠بءهـ) ...... ① بالتبادل

∵ ق(∠أبء) = ق(∠بجـء) ...... ② مماسية ومحيطية تحصران نفس القوس

من ① ، ② ∴ ق(∠بءهـ) = ق(∠بجـهـ)

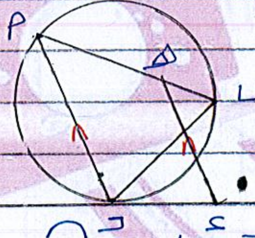
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب ء جـ هـ رباعي دائري

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{ءجـ}$ مماس للدائرة عند جـ ، رسم $\overline{ءهـ} \parallel \overline{أجـ}$

تقطع $\overline{أب}$ في هـ ، اثبت أن ب هـ جـ ء رباعي دائري



الحل

∵ $\overleftrightarrow{ءجـ}$ مماس للدائرة عند جـ

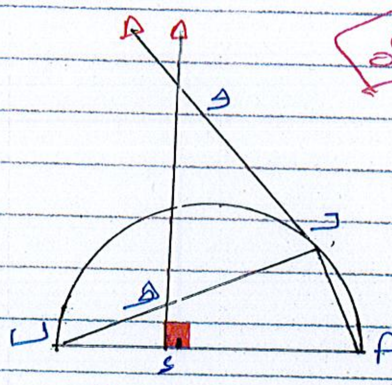
∴ ق(∠بجـء) = ق(∠بأجـ) ...... ① مماسية ومحيطية تحصران نفس القوس

∵ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{أجـ}$

∴ ق(∠بهـء) = ق(∠بأجـ) ...... ② بالتناظر

من ① ، ② ∴ ق(∠بهـء) = ق(∠بجـء)

وهما مرسومتان على ب ء وفي جهة واحدة منها



٥٧

* الزاوية المماسية *

$\overline{أب}$ قطر في نصف دائرة، $\overleftrightarrow{جـو}$ مماس لها عند جـ

$\overleftrightarrow{ءو} \perp \overline{أب}$

① برهن أن: الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

② برهن أن: △ و جـ هـ متساوي الساقين

③ عين مركز الدائرة المار برؤوس الشكل أ ء هـ جـ.

الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر ∴ ق(∠أجـب) = 90° ...... ① محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ $\overleftrightarrow{ءو} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠أءهـ) = 90° ...... ②

من ①، ② ∴ ق(∠أءهـ) + ق(∠أجـهـ) = $90 + 90 = 180^\circ$

وهما متقابلتان ∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري (أولاً)

∵ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

∴ ق(∠وهـجـ) = ق(∠جـأء) ...... ③ خارجة عن الرباعي الدائري

∵ $\overleftrightarrow{جـو}$ مماس للدائرة عند جـ

∴ ق(∠وجـهـ) = ق(∠جـأء) ...... ④ مماسية ومحيطية

من ③، ④

∴ ق(∠وجـهـ) = ق(∠وهـجـ)

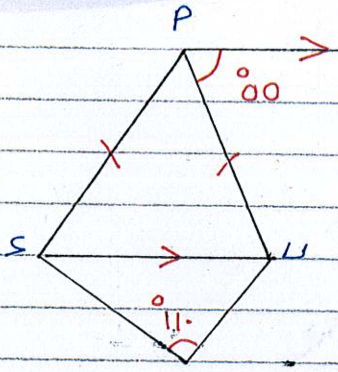
∴ △ وجـهـ متساوي الساقين (ثانياً)

∵ ق(∠أجـهـ) = 90°

∴ ∠جـأهـ محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ $\overline{أهـ}$ قطر في هذه الدائرة

∴ مركز الدائرة المار بالنقط أ، ء، هـ، جـ يقع منتصف $\overline{أهـ}$



عكس نظرية (5)

في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أهـ} \parallel \overline{ب د}$

ق(ب أ هـ) = 55° ، ق(جـ) = 110° ، أب = أد

اثبت أن ① الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

② $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ د

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أهـ} \parallel \overline{ب د}$ ، $\overline{أب}$ قاطع لهما

∴ ق(هـ أ ب) = ق(أ ب د) = 55° بالتبادل

في Δ أ ب د ∵ أب = أد

∴ ق(أ د ب) = ق(أ ب د) = 55°

∴ ق(ب أ د) = 180 − (55 + 55) = 70°

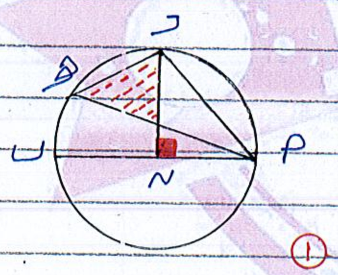
في الشكل أ ب جـ د

∵ ق(جـ) + ق(ب أ د) = 110 + 70 = 180 وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري (أولاً)

∵ ق هـ أ ب = ق أ د ب = 55°

∴ $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ د



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{م جـ} \perp \overline{أب}$ ، د ∈ $\overline{م جـ}$

رسم $\overline{أد}$ فقطع الدائرة في هـ

اثبت أن $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة الخارجة عن Δ جـ د هـ

الحل

∵ ق(أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ م جـ) = $\frac{90}{2}$ = 45° .... ①

محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{أجـ}$

في Δ أ م جـ ∵ م أ = م جـ = نق

∴ ق(م جـ أ) = $\frac{180 - 90}{2}$ = $\frac{90}{2}$ = 45° .... ②

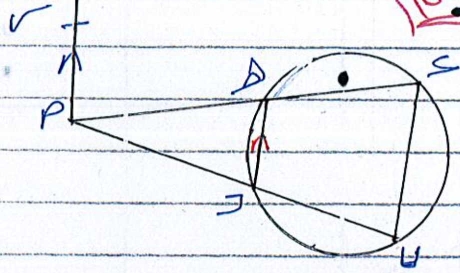
من ①، ②

∴ ق(أ جـ م) = ق(أ هـ جـ) = 45°

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة الخارجة عن Δ جـ د هـ

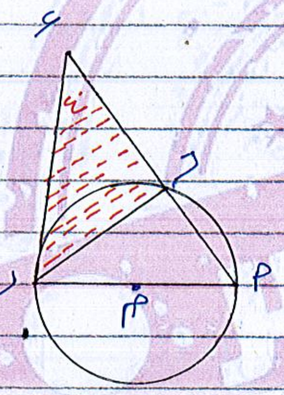
١٥٩

عكس نظرية (٥)



في الشكل المقابل
ب ج هـ د رباعي دائري
د هـ ∩ ب ج = {أ} ، أ س // ج هـ
برهن أن: أ س مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب د

الحل
∵ أ س // ج هـ
∴ ق(∠س أ هـ) = ق(∠أ هـ ج) بالتبادل ...... (١)
∵ د ب ج هـ رباعي دائري
∴ ق(∠أ هـ ج) = ق(∠د ب ج) خارجة عن الرباعي الدائري ...... (٢)
من (١)، (٢) ∴ ق(∠س أ هـ) = ق(∠ب)
∴ أ س مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب د

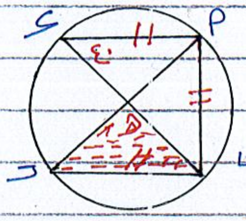


أ ب قطر في الدائرة م ، أ ج وتر فيها
رسم ب د مماساً يقطع أ ج في د
ق(∠ج د ب) = ٤٠°
اثبت أن: أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس △ ج ب د

البرهان:
∵ أ ب قطر في الدائرة م
∴ ق(∠أ ج ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة
∵ ب د مماساً للدائرة م في ب
∴ ق(∠أ ب د) = ٩٠°
في △ أ ب د القائم في ب
ق(∠أ) = ١٨٠ – ٩٠ + ٤٠ = ٥٠°
في △ أ ب ج القائم في ج
ق(∠أ ب ج) = ١٨٠ – ٩٠ + ٥٠ = ٤٠°
∴ ق(∠أ ب ج) = ق(∠د) = ٤٠°
∴ أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس △ ج ب د

عكس نظرية (٥)

٦٠



في الشكل المقابل :-

ق(أ د̂ ب) = ٤٠° ، أد = أب

① أوجد : ق(أ ج̂ ب)

② أثبت أن : أب مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، هـ ، ج

الحل

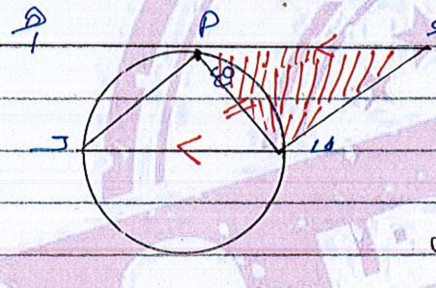
في △ أ ب د ∵ أب = أد

∴ ق(أ ب̂ د) = ق(أ د̂ ب) = ٤٠° ...... ①

∵ ق(أ د̂ ب) = ق(أ ج̂ ب) = ٤٠° ...... ② محيطيتان تحصران أب (أولاً)

∴ ق(أ ب̂ هـ) = ق(هـ ج̂ ب) = ٤٠°

∴ أب مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، هـ ، ج (ثانياً)



في الشكل المقابل

أد مماس للدائرة عند أ

ق(د أ̂ ب) = ٤٥° ، أد // ب ج

أوجد ق(هـ أ̂ ج)

وإذا كان أب = ب د أثبت أن ب ج قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أ ب د

الحل

∵ أد // ب ج ∴ ق(أ ب̂ ج) = ق(د أ̂ ب) = ٤٥° بالتبادل

∵ أهـ مماس للدائرة عند أ

∴ ق(هـ أ̂ ج) = ق(أ ب̂ ج) = ٤٥° مماسية ومحيطية تحصران أج (أولاً)

في △ أ ب د ∵ أب = ب د

∴ ق(ب د̂ أ) = ق(ب أ̂ د) = ٤٥°

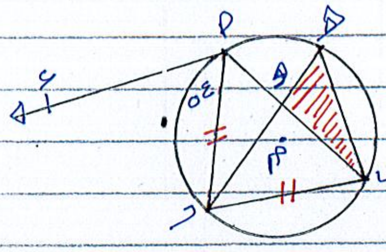
∴ ق(أ ب̂ ج) = ق(د̂) = ٤٥°

∴ ب ج قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أ ب د

عكس نظرية (٥)

٦١

في الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، أ ج = ب ج ،

$\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة ، ق(∠ج أ د) = ٤٠°

① أوجد ق(∠أ ب ج) ، ق(∠ب هـ ج)

② اثبت أن $\overline{ب ج}$ تمس الدائرة المارة برؤوس △ ب هـ و

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة م

∴ ق(∠أ ب ج) = ق(∠د أ ج) = ٤٠° محيطية ومماسية تحصران $\widehat{أج}$ (أولاً)

في △ أ ب ج

∵ أ ج = ب ج

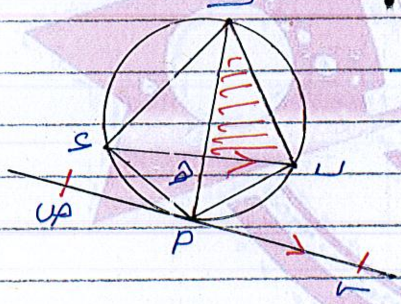
∴ ق(∠ج أ ب) = ق(∠أ ب ج) = ٤٠°

∴ ق(∠ب هـ ج) = ق(∠ب أ ج) = ٤٠° محيطتان تحصران $\widehat{ب ج}$ (ثانياً)

∵ ق(∠ج ب و) = ق(∠ب هـ و) = ٤٠°

∴ $\overline{ب ج}$ تمس الدائرة المار برؤوس △ ب هـ و

في الشكل المقابل:



أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تتقاطع قطراه في هـ

فإذا كانت $\overleftrightarrow{س ص}$ مماساً للدائرة عند أ

فإذا كانت $\overleftrightarrow{س ص}$ مماساً للدائرة عند أ ، $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{ب د}$

اثبت أن ① $\overrightarrow{ج أ}$ تنصف ∠ ب ج د

② $\overleftrightarrow{أ ب}$ يمس الدائرة المارة بالنقط ب ، ج ، هـ

الحل ∵ $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{ب د}$

∴ ق($\widehat{أ ب}$) = ق($\widehat{أ د}$)

∴ ق(∠ب ج أ) = ق(∠د ج أ) نتيجة على نظرية (٤) ...... ①

∴ $\overrightarrow{ج أ}$ ينصف ∠ ب ج د (أولاً)

∵ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ ج د) محيطتان تحصران $\widehat{أ د}$ ...... ②

من ① ، ②

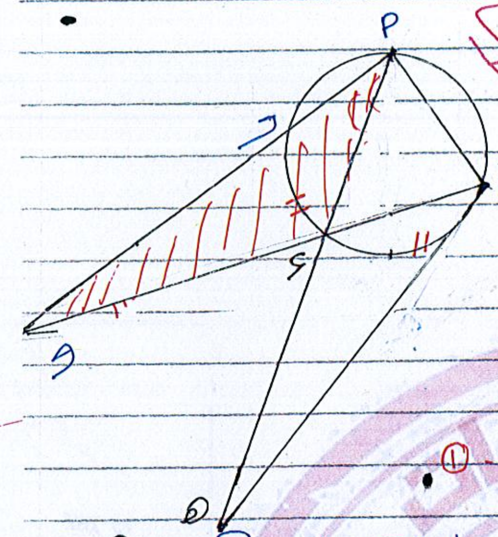
∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ب ج هـ)

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ يمس الدائرة المارة بالنقط ب ، ج ، هـ

عكس نظرية (٥)

٢٦

في الشكل المقابل

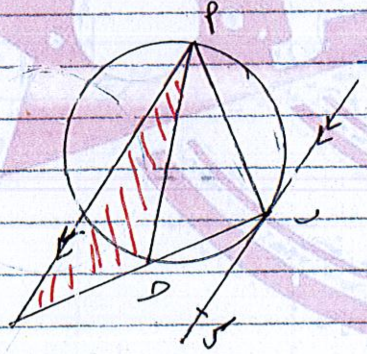


أب ، أج وتران في دائرة ، د منتصف بج
رسم ب هـ مماس للدائرة عند ب فقطع أد في هـ
رسم ب د قطع أج في و
اثبت أن ① الشكل أ ب هـ و رباعي دائري
② و هـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ د و

الحل

∵ د منتصف بج ∴ ق(بد) = ق(دج)
∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠ج أ د) ......①
∵ ب هـ مماس للدائرة عند ب
∴ ق(∠هـ ب د) = ق(∠د أ ب) مماسية ومحيطية تحصران بد ......②
من ① ، ② ∴ ق(∠هـ ب د) = ق(∠هـ أ و)
وهما مرسومتان على هـ و وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل أ ب هـ و رباعي دائري
∴ ق(∠هـ و ب) = ق(∠هـ أ ب) مرسومتان على هـ ب ......③
من ① ، ③ ∴ ق(∠هـ و د) = ق(∠د أ و)
∴ و هـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ د و

في الشكل المقابل

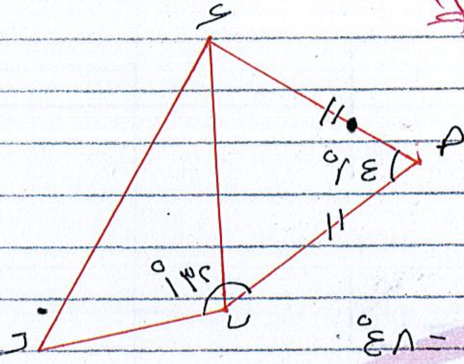


أ ب ج مثلث داخل دائرة ، ب س مماس للدائرة عند ب
أ د // ب س اثبت أن :
أب مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ج د

الحل

∵ ب س مماس للدائرة عند ب
∴ ق(∠س ب ج) = ق(∠ب أ ج) مماسية ومحيطية تحصران ب ج ......①
∵ ب س // أ د
∴ ق(∠س ب ج) = ق(∠د) بالتبادل ......②
من ① ، ② ∴ ق(∠ب أ ج) = ق(∠د)
∴ أب مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أ ج د

عكس نظرية (٥)



في الشكل المقابل:

أ ب جـ د رباعي فيه أب = أد ،

ق(∠أ) = ٨٤° ، ق(∠أ ب جـ) = ١٣٢°

اثبت أن: $\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ، ب، د

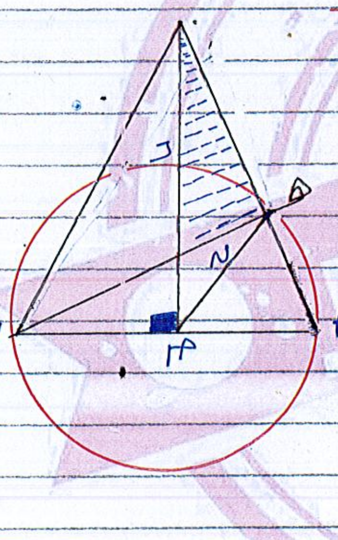
الحل: في △ أ ب د ∵ أب = أد

∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ د ب) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢} = \frac{٩٦}{٢} = ٤٨°$

∴ ق(∠جـ ب د) = ١٣٢ − ٤٨ = ٨٤°

∴ ق(∠جـ ب د) = ق(∠أ) = ٨٤°

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ، ب، د



$\overline{\text{أب}}$ قطر في دائرة مركزها م ، م جـ نصف قطر فيها عمودي على $\overline{\text{أب}}$

اثبت أن ① الشكل د هـ م ب رباعي دائري

② $\overline{\text{هـ م}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس م ن د هـ

الحل

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°   محيطية في نصف دائرة

∴ ق(∠د هـ ب) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

∴ ق(∠د هـ ب) = ق(∠د م ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على $\overline{\text{أب}}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل د هـ م ب رباعي دائري (أولاً)

∴ ق(∠هـ د م) = ق(∠هـ ب م) مرسومتان على $\overline{\text{هـ م}}$ .... ①

في △ م ب هـ

∵ م ب = م هـ = نق

∴ ق(∠م هـ ب) = ق(∠م ب هـ) .... ②

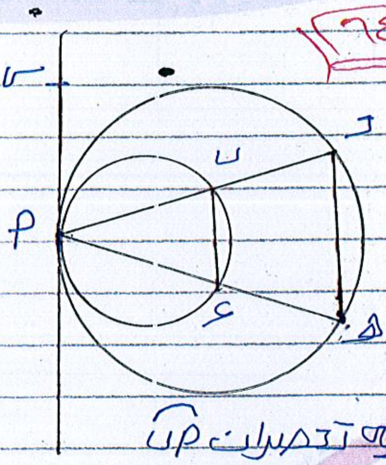
من ① و ② ∴ ق(∠م هـ ب) = ق(∠هـ د ن)

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس م ن د هـ

٦٤

* الزاوية المماسية *

دائرتان متماستان من الداخل فى أ ، $\overleftrightarrow{أس}$ مماس مشترك لهما عند أ ، $\overleftrightarrow{أد}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ يقطعان الدائرة فى د ، ب ويقطعان الكبرى فى هـ ، جـ



اثبت أن : $\overline{دب}$ // $\overline{هـجـ}$

الحل

فى الدائرة الصغرى

$\because$ $\overline{أب}$ مماس لها عند أ

$\therefore$ ق ($\widehat{س أ ب}$) = ق ($\widehat{أ د ب}$) .... ① مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{أب}$

فى الدائرة الكبرى

$\because$ $\overline{أس}$ مماس لها عند أ

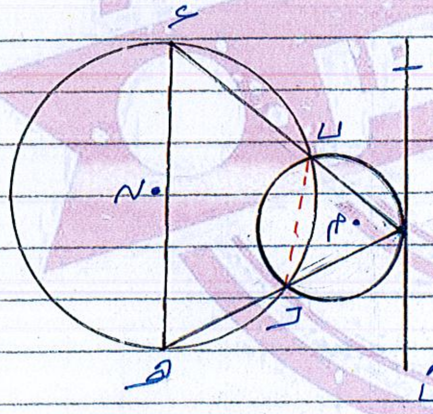
$\therefore$ ق ($\widehat{س أ جـ}$) = ق ($\widehat{جـ هـ أ}$) .... ② مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{أجـ}$

من ① ، ②

$\therefore$ ق ($\widehat{أ د هـ}$) = ق ($\widehat{أ هـ جـ}$) وهما فى وضع تناظر

$\therefore$ $\overline{دب}$ // $\overline{هـجـ}$

دائرتان متقاطعتان فى ب ، جـ ، $\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ يقطعان الدائرة الأخرى فى ع ، هـ



اثبت أن $\overleftrightarrow{أو}$ // $\overline{ع هـ}$

العمل : نرسم $\overline{ب جـ}$

البرهان : $\overline{أو}$ مماس للدائرة م عند أ

$\therefore$ ق ($\widehat{و أ ب}$) = ق ($\widehat{أ جـ ب}$) .... ① محيطية ومماسية تحصران $\overset{\frown}{أب}$

$\because$ الشكل ب جـ هـ ع رباعى دائرى

$\therefore$ ق ($\widehat{أ جـ ب}$) = ق ($\widehat{ع}$) خارجة عن رباعى الدائرى .... ②

من ① ، ②

$\therefore$ ق ($\widehat{و أ ب}$) = ق ($\widehat{ع}$) وهما فى وضع تبادل.

$\therefore$ $\overline{أو}$ // $\overline{ع هـ}$

سلسلة

كنزي

أحمد عمر

kanzi-eg.blogspot.com

Ahmedomar3782